Suurten poikkeamien teorian tentti, 23.5.2001

1. Olkoon $\{X_n\}$ satunnaismuuttujaperhe ja $I : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ vauhtifunktio. Oletetaan, että mielivaltaiselle $x \in \mathbf{R}$ ja $\varepsilon > 0$ pätee

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbf{P}(X_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)) \geq -I(x).$$

Olkoon $G \subseteq \mathbf{R}$ mielivaltainen avoin joukko. Osoita, että

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbf{P}(X_n \in G) \geq -\inf\{I(x) \mid x \in G\}.$$

2. Olkoot $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrina $\mu > 0$ (tiheysfunktio $\mu e^{-\mu y}$ alueessa $y > 0$). Olkoon $\xi_i = 2\eta_i - \eta_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$ ja

$$Y_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \; n = 1, 2, \ldots.$$

a) Määrää raja-arvo

$$c(t) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbf{E}\{e^{tY_n}\}, \;\; \forall t \in \mathbf{R}.$$

b) Osoita, että Gärtner-Ellisin lauseen ehdot eivät ole täytetyt.

3. Olkoon $\{Y_n\} = \{(Y_{n1}, Y_{n2})\}$ $\mathbf{R}^2$-arvoinen satunnaisvektoriperhe. Oletetaan, että on olemassa raja-arvo

$$d_i(t) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbf{E}\{e^{tY_{ni}}\} \in \mathbf{R}, \;\; \forall t \in \mathbf{R}$$

ja että d_i on kaikkialla derivoituva, $i = 1, 2$. Oletetaan lisäksi, että Y_{n1} ja Y_{n2} ovat riippumattomia, $\forall n \in \mathbf{N}$.

a) Osoita, että $\{Y_n/n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen eräällä vauhtifunktiolla.

b) Olkoon $Z_n = Y_{n1} + Y_{n2}$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Osoita, että perhe $\{Z_n/n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen vauhtifunktiolla I,

$$I(x) = \inf_{y\in\mathbf{R}} \{d_1^*(x-y) + d_2^*(y)\}, \;\; \forall x \in \mathbf{R}.$$

4. Olkoon $\{Y_n\}$ satunnaismuuttujaperhe ja

$$(*) \qquad c(t) = \limsup_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbf{E}\{e^{tY_n}\}, \;\; \forall t \in \mathbf{R}.$$

Oletetaan, että $c(t)$ on äärellinen, $\forall t \in \mathbf{R}$.

a) Todista, että

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbf{E}\{e^{tY_n} \mathbf{1}(tY_n/n > M)\} = -\infty, \;\; \forall t \in \mathbf{R}.$$

b) Oletetaan lisäksi, että $\{Y_n/n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen vauhtifunktiolla c^*. Osoita, että $(*)$ pätee raja-arvona, $\forall t \in \mathbf{R}$.

Suurten poikkeamien teoria 10.8.2004

1. Olkoon $\{X_n\}$ $\mathbf{R}^d$-arvoinen satunnaisvektoriperhe ja $I : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ ei-negatiivinen funktio. Oletetaan, että

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbf{P}(X_n \in F) \leq -\inf\{I(x) \mid x \in F\}$$

jokaiselle suljetulle joukolle $F \subseteq \mathbf{R}^d$ ja

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbf{P}(X_n \in G) \geq -\inf\{I(x) \mid x \in G\}$$

jokaiselle avoimelle $G \subseteq \mathbf{R}^d$. Olkoon

$$I_L(x) = \sup\{J(x) \mid J : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R} \text{ alhaalta puolijatkuva, } J(y) \leq I(y), \forall y \in \mathbf{R}^d\}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}^d$ (voidaan todistaa, että I_L on vauhtifunktio). Osoita, että $\{X_n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen vauhtifunktiolla I_L.

2. Olkoon $\{Y_n\}$ reaaliarvoinen stokastinen prosessi. Oletetaan, että $\{Y_n/n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen vauhtifunktiolla I. Olkoon $U_0 > 0$ ja

$$T = \inf\{n \mid Y_n > U_0\},$$

missä tyhjän joukon infimum sovitaan äärettömäksi. Osoita, että

$$\liminf_{U_0\to\infty} U_0^{-1} \log \mathbf{P}(T < \infty) \geq -\inf_{x>0} xI(1/x).$$

3. Olkoot $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita positiivisia satunnaismuuttujia ja $Y_n = \eta_1 + \cdots + \eta_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Oletetaan, että $\mathbf{E}(\eta^t) < \infty$ kaikilla $t > 0$. Osoita, että

$$\overline{c}(t) \doteq \limsup_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbf{E}(Y_n^t) \leq t \tag{1}$$

kaikilla $t > 1$.

Totea, että (1) pätee yhtälönä, kun $t = 1$. Osoita tämän avulla, että $\overline{c}(t) = t, \forall t > 1$.

Tehtävässä voi käyttää ns. Minkowskin epäyhtälöä: olkoon $p > 1$ vakio ja X ja Y mielivaltaisia satunnaimuuttujia, joille $\mathbf{E}\{\mid X \mid^p\} < \infty$ ja $\mathbf{E}\{\mid Y \mid^p\} < \infty$. Silloin

$$\mathbf{E}\{\mid X + Y \mid^p\}^{1/p} \leq \mathbf{E}\{\mid X \mid^p\}^{1/p} + \mathbf{E}\{\mid Y \mid^p\}^{1/p}.$$

4. Olkoon $Y_1, Y_2, \ldots$ jono satunnaismuuttujia. Oletetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbf{E}_n\{e^{tY_n}\} = t^2 - t$$

kaikilla $t \in \mathbf{R}$. Määrää raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbf{E}_n\{e^{-Y_n^2/n}\}.$$

Suurten poikkeamien teoria 20.1.2005

1. Oletetaan, että jakaumaperhe $\{P_n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen vauhtifunktiolla I. Osoita, että I on hyvä vauhtifunktio silloin ja vain silloin kun $\{P_n\}$ on eksponentiaalisesti tiukka.

2. Olkoon $\{Y_n\}$ reaaliarvoinen stokastinen prosessi. Oletetaan, että $\{Y_n/n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen vauhtifunktiolla I. Olkoon $U_0 > 0$ ja

$$T = \inf\{n \mid Y_n > U_0\},$$

missä tyhjän joukon infimum sovitaan äärettömäksi. Osoita, että

$$\liminf_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbf{P}(T < \infty) \geq - \inf_{x>0} xI(1/x).$$

3. Olkoot $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita positiivisia satunnaismuuttujia ja $Y_n = \eta_1 + \cdots + \eta_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Oletetaan, että

$$\lim_{x \to \infty} (\log x)^{-1} \log \mathbf{P}(\eta > x) = -\alpha,$$

missä $\alpha \in (1, \infty)$. Voidaan osoittaa, että $\{\log Y_n / \log n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen skaalauksella $\{\log n\}$ ja vauhtifunktiolla I, $I(x) = +\infty$, jos $x < 1$, $I(1) = 0$ ja $I(x) = \alpha x - 1$, jos $x > 1$ (esimerkiksi

$$\limsup_{n \to \infty} (\log n)^{-1} \log \mathbf{P}(\log Y_n / \log n \in F) \leq - \inf\{I(x) \mid x \in F\}$$

kaikille suljetuille joukoille F). Voidaan osoittaa, että $\mathbf{E}(\eta^t) < \infty$ kaikilla $t \in (0, \alpha)$. Määrää raja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} (\log n)^{-1} \log \mathbf{E}(Y_n^t), \quad t \in (1, \alpha).$$

Tehtävässä voi käyttää ns. Minkowskin epäyhtälöä: olkoon $p > 1$ vakio ja X ja Y mielivaltaisia satunnaismuuttujia, joille $\mathbf{E}\{| X |^p\} < \infty$ ja $\mathbf{E}\{| Y |^p\} < \infty$. Silloin

$$\mathbf{E}\{| X + Y |^p\}^{1/p} \leq \mathbf{E}\{| X |^p\}^{1/p} + \mathbf{E}\{| Y |^p\}^{1/p}.$$

4. Tarkastellaan kahden henkilön A ja B peliä, jossa kummankin voittotodennäköisyys on $1/3$ ja tasapelin todennäköisyys on myös $1/3$. Kuvatkoon ξ pelin lopputulosta: $\xi = -1$, jos A voittaa, $\xi = +1$, jos B voittaa ja $\xi = 0$, jos tulee tasapeli. Olkoot $\xi_1, \xi_2, \ldots$ peräkkäisten pelien tulokset. Oletetaan, että $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita kuin ξ. Olkoon V_n tapahtuma

$$V_n = \{\text{B voittaa vähintään puolet } n \text{ ensimmäisestä pelistä}\}.$$

Määrää

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(\xi_1 = a_j \mid V_n), \quad a_j = -1, 0, 1.$$