STATIONAARISET AIKASARJAT. 10 OP. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–6. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Yleistentti 14.11.2007

Vastaa kaikkiin kysymyksiin. Kukin tehtävistä on kuuden pisteen arvoinen. Palauta kysymyspaperi (kiitos!).

1. Oletetaan, että y_t noudattaa 2. asteen differenssiyhtälöä

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + w_t.$$

Selitä, mikä suure on

$$\partial y_{t+j}/\partial w_t = c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j = 2R^j[\alpha\cos(\theta j) - \beta\sin(\theta j)],$$

mitä ovat siinä esiintyvät muuttujat ja parametrit ja milloin yhtäsuuruudet pätevät.

b) Selitä yksityiskohtaisesti, miten yllä olevan suureen käyttäytyminen riippuu differenssiyhtälöön liittyvän karakteristisen yhtälön juurista.

2. Saakoon prosessin $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ alkuarvo y_0 arvon 1 todennäköisyydellä 1/2 ja arvon −1 todennäköisyydellä 1/2. Myöhemmät y_t:n arvot määräytyvät kaavan

$$y_t = (-1)^t y_0, \quad t = 1, 2, \ldots,$$

mukaisesti.

a) Johda y_t:n odotusarvo, varianssi ja autokovarianssifunktio.

b) Onko y_t heikosti stationaarinen prosessi? Perustele. Kuoleentuuko stationaarisen prosessin autokorrelaatiofunktio aina suurilla viipeillä? Perustele.

c) Johda ennuste yllä olevaa kaavaa noudattavalle y_{t+1}:lle käyttämällä keskineliövirheen mielessä optimaalisen lineaarisen ennusteen yleisiä tuloksia ja ehdollistavana informaationa y_t:tä (ei vakiota). (Voit tietenkin johtaa myös edellä mainitun yleisen tuloksen, jos haluat.) Mikä on ennusteen keskineliövirhe?

3.

a) Noudattakoon aikasarja y_t, $t = 1, \ldots, T$, AR(1)-prosessia

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

jossa c on vakio ja ε_t $\sim$NID$(0, \sigma^2)$. Määrittele ja perustele malliin liittyvä (kirjassa esitetty) ehdollinen uskottavuusfunktio. Miten malli estimoidaan sen avulla?

b) Noudattakoon aikasarja y_t, $t = 1, \ldots, T$, MA(1)-prosessia

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1},$$

jossa μ on vakio ja ε_t $\sim$NID$(0, \sigma^2)$. Määrittele ja perustele malliin liittyvä (kirjassa esitetty) ehdollinen uskottavuusfunktio. Miten malli estimoidaan sen avulla? Vaikuttaako θ:n suuruus estimointiin, ja jos vaikuttaa niin miten? Perustele.

4. Olkoon prosessi heikosti stationaarinen ja sen autokovarianssit (γ_j) absoluuttisesti summautuvia.

a) Määrittele prosessin populaatiospektri. Tulkitse se sanoin.

b) Olkoon prosessi lisäksi *i)* MA(∞) tai *ii)* ARMA(p,q). Esitä populaatiospektrit nimenomaan näille prosesseille.

c) Määrittele ja kuvaa, millaisia ovat populaatiospektrit, kun prosessi on *i)* valkoista kohinaa *ii)* MA(1), jossa MA-parametri $\theta > 0$ tai $\theta < 0$ ja *iii)* AR(1), jossa AR-parametri $\phi > 0$ tai $\phi < 0$. Tulkitse spektrit sanoin.

Aputuloksia:

2. asteen polynomin $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ juurten ratkaisukaava:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$\begin{aligned} \exp(i\omega) &= \cos(\omega) + i\sin(\omega), \\ \exp(-i\omega) &= \cos(\omega) - i\sin(\omega). \end{aligned}$$

STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–6. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Yleistentti 18.12.2007

Aineopintoja tenttivät vastaavat kolmeen ensimmäiseen kysymykseen; maisteriopintoja tenttivät kaikkiin kysymyksiin (pl. ne, jotka ovat erikseen sopineet harjoitustyön tekemisestä). Kukin tehtävistä on kuuden pisteen arvoinen. Palauta kysymyspaperi (kiitos!).

1. Sovitetaan AR-malleja (logaritmoidun henkeä kohti lasketun reaalisen) Suomen bruttokansantuotteen muutoksiin (y_t) 1975–2002 (vuosihavaintoja). AR(2)-malli sopii informaatiokriteerien mukaan parhaiten aineistoon. (Pienimmän neliösumman menetelmällä) estimoitu AR(2)-malli on

$$y_t = 0,013 + 0,84y_{t-1} - 0,41y_{t-2} + \hat{\varepsilon}_t$$

ilmeisin merkinnöin. Oletetaan onnellinen tilanne, että estimoitu malli on sama kuin prosessi (parametrien estimaatit ovat parametrien todelliset arvot ja estimoitu innovaatio on todellinen valkoista kohinaa oleva innovaatio).

a) Mikä on prosessiin liittyvä karakteristinen yhtälö? Ovatko yhtälön juuret kompleksisia? Miten juurten kompleksisuus vaikuttaisi yhtälön impulssivastefunktioon?

b) Onko prosessi heikosti stationaarinen? Perustele. (Voit sivuuttaa alkuarvojen mahdollisen vaikutuksen heikkoon stationaarisuuteen.)

c) Laske prosessin odotusarvo.

d) Kuvaile miten prosessin autokorrelaatiot käyttäytyvät. Perustele.

2. Saakoon prosessin $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ alkuarvo y_0 arvon 1 todennäköisyydellä 1/2 ja arvon -1 todennäköisyydellä 1/2. Myöhemmät y_t:n arvot määräytyvät kaavan

$$y_t = (-1)^t y_0, \quad t = 1, 2, \ldots,$$

mukaisesti.

a) Johda y_t:n odotusarvo, varianssi ja autokovarianssifunktio.

b) Onko y_t heikosti stationaarinen prosessi? Perustele. Kuoleentuuko stationaarisen prosessin autokorrelaatiofunktio aina suurilla viipeillä? Perustele.

c) Johda ennuste yllä olevaa kaavaa noudattavalle y_{t+1}:lle käyttämällä keskineliövirheen mielessä optimaalisen lineaarisen ennusteen yleisiä tuloksia ja ehdollistavana informaationa y_t:tä (ei vakiota). (Voit tietenkin johtaa myös edellä mainitun yleisen tuloksen, jos haluat.) Mikä on ennusteen keskineliövirhe?

3. Oheisissa kuvissa on aikasarjat vanhojen kerrostaloasuntojen hinnan logaritmin kehityksestä ja sen muutoksista pääkaupunkiseudulla 1983/1–2005/4 (neljännesvuosiaineistoja; jälkimmäinen aikasarja 1983/2–2005/4). Tutkitaan jälkimmäistä aikasarjaa ajanjaksolla 1985/2–2005/4 (83 havaintoa). Oheisissa kuvissa ja taulukoissa on sen otosauto- ja otososittaisautokorrelaatiofunktiot.

a) Laske otosauto- ja otososittaisautokorrelaatioiden keskivirheet ja niiden avulla 95 prosentin luottamusvälit auto- ja osittaisautokorrelaatioille (autokorrelaatioiden keskivirheet voit laskea kummalla tahansa luennoilla selitetyistä tavoista). Selitä mitä oletuksia luottamusvälien laskuun liittyy. Piirrä luottamusvälit kuviin.

b) Millainen ARMA-prosessi vaikuttaa tuottaneen muutosaikasarjan? Perustele vastauksesi autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktioiden ominaisuuksien ja a)-kohdan vastauksesi avulla.

c) Muutoksiin sovitettiin ARMA-malleja ehdollisella suurimman uskottavuuden menetelmällä[1]. AIC-kriteerit malleille ovat taulukossa alla. Selitä mikä AIC-kriteeri on, miten sitä käytetään ja sen intuitio. Mitä mallia AIC-kriteeri suosittelee muutoksille?

4.

a) Olkoon prosessi heikosti stationaarinen ja sen autokovarianssit (γ_j) absoluuttisesti summautuvia. Oletetaan, että populaatiospektri

$$s_Y(\omega) = (2\pi)^{-1}[\gamma_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(\omega j)]$$

(ilmeisin merkinnöin) tunnetaan ω:n arvoilla välillä $[0, \pi]$. Selitä, miksi $s_Y(\omega)$ tunnetaan tällöin myös kaikilla muilla ω:n arvoilla.

b) Selitä, mikä on populaatiospektrin matalin merkityksellinen taajuus ja miksi. Mikä on tähän taajuuteen liittyvä periodin pituus?

c) Määrittele periodogrammi.

d) Selitä periodogrammin ominaisuudet spektrin estimaattorina pääpiirtein.

e) Esittele jokin periodogrammia kehittyneempi spektrin estimointimenetelmä.

f) Olkoon kuukausihavaintojen lukumäärä $T = 513$, spektri estimoitu ja esitetty siten (kuten kirjassa), että vaaka-akselille ei ole merkitty taajuutta $\omega_j = 2\pi j/T$ vaan j. Arvolla $j = 18$ on estimoidussa spektrissä huippu. Mikä on taajuus, ja mikä on siihen liittyvän periodin pituus? Tulkitse laskemasi luvut sanoin.

[1] Estimoinnit tehtiin PcGive 10.0:n ARFIMA-modulilla. Tarkalleen ottaen käytetty estimointimenetelmä ei ollut ehdollinen SU-menetelmä, mutta voit vastauksessasi olettaa sen olleen!

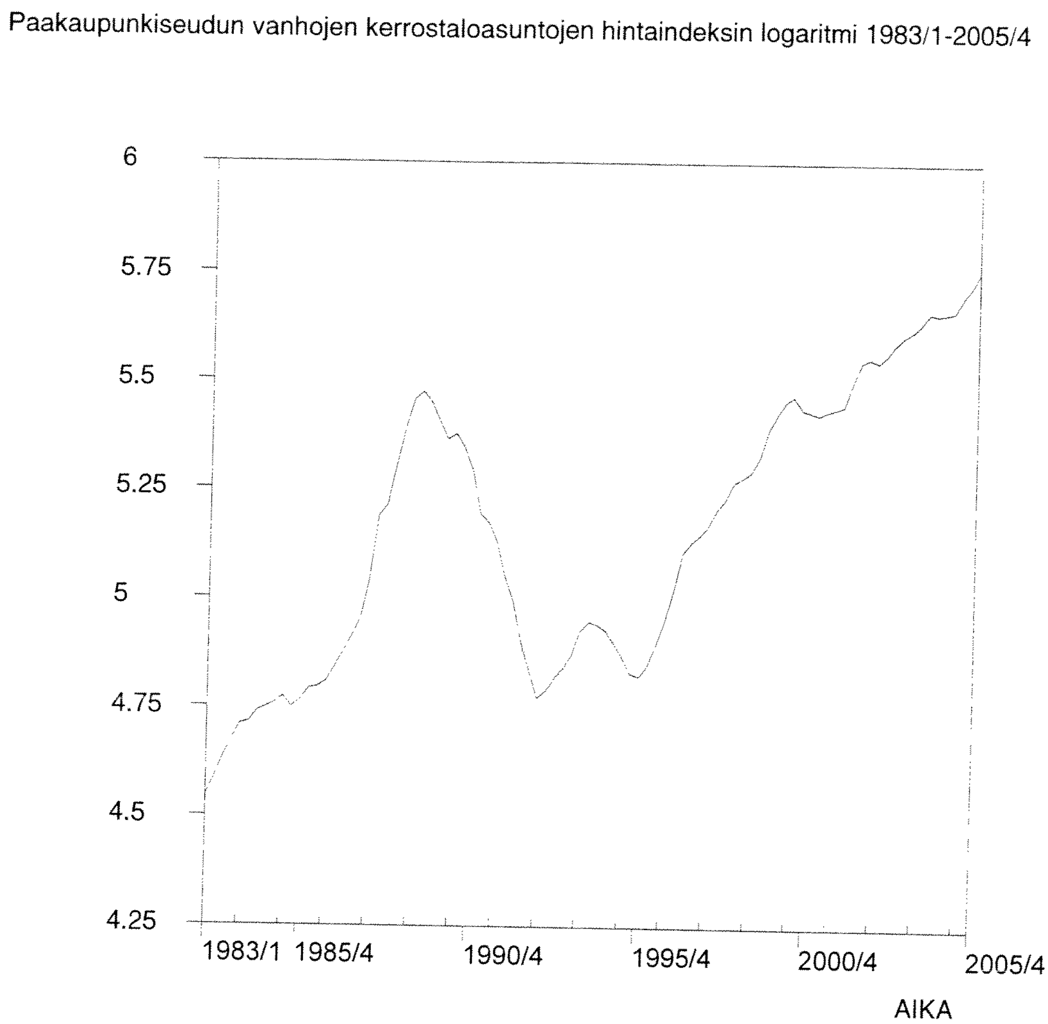
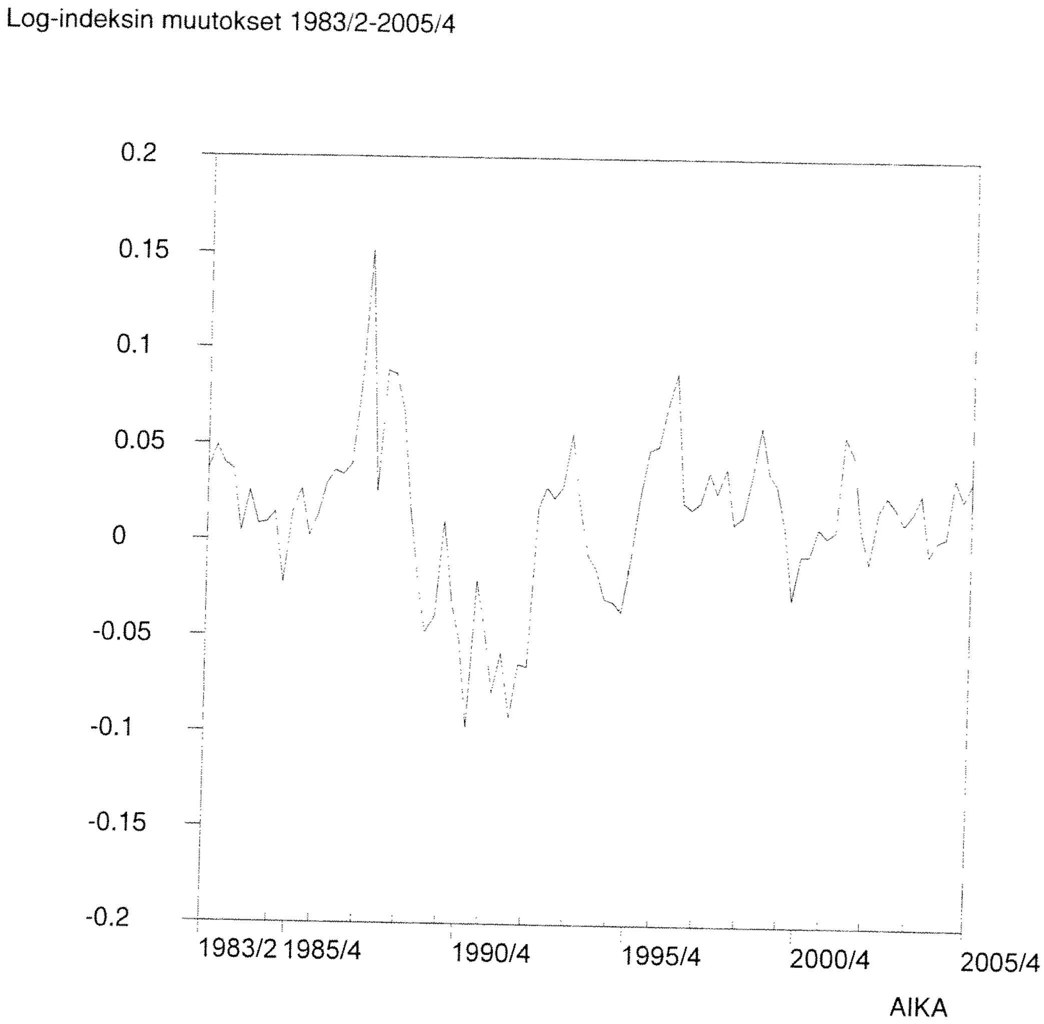

Paakaupunkiseudun vanhojen kerrostaloasuntojen hintaindeksin logaritmi 1983/1-2005/4
6
5.75
5.5
5.25
5
4.75
4.5
4.25
1983/1
1985/4
1990/4
1995/4
2000/4
2005/4
AIKA

Figure 1:



Log-indeksin muutokset 1983/2-2005/4
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
1983/2 1985/4
1990/4
1995/4
2000/4
2005/4
AIKA

Figure 2:

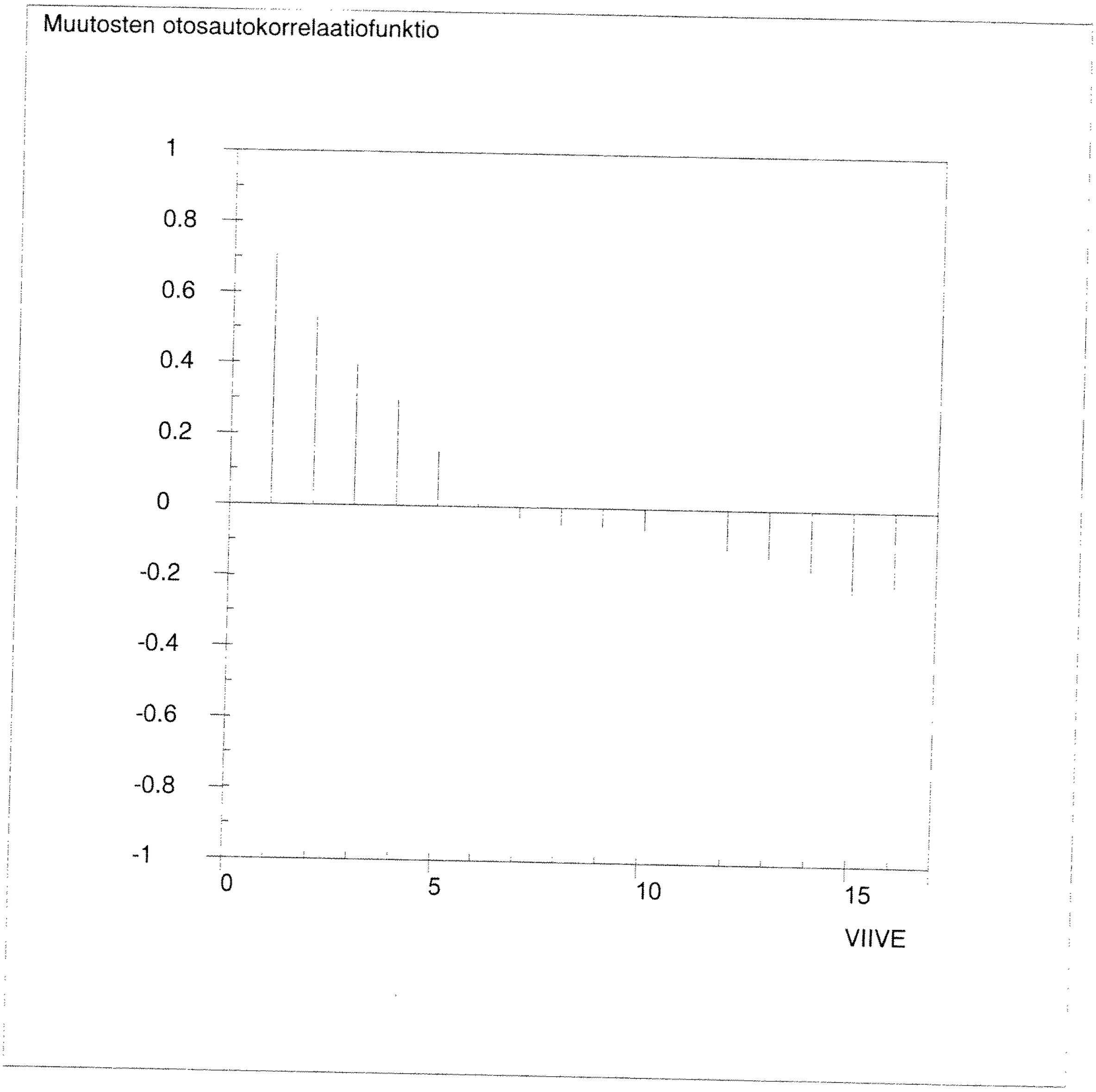
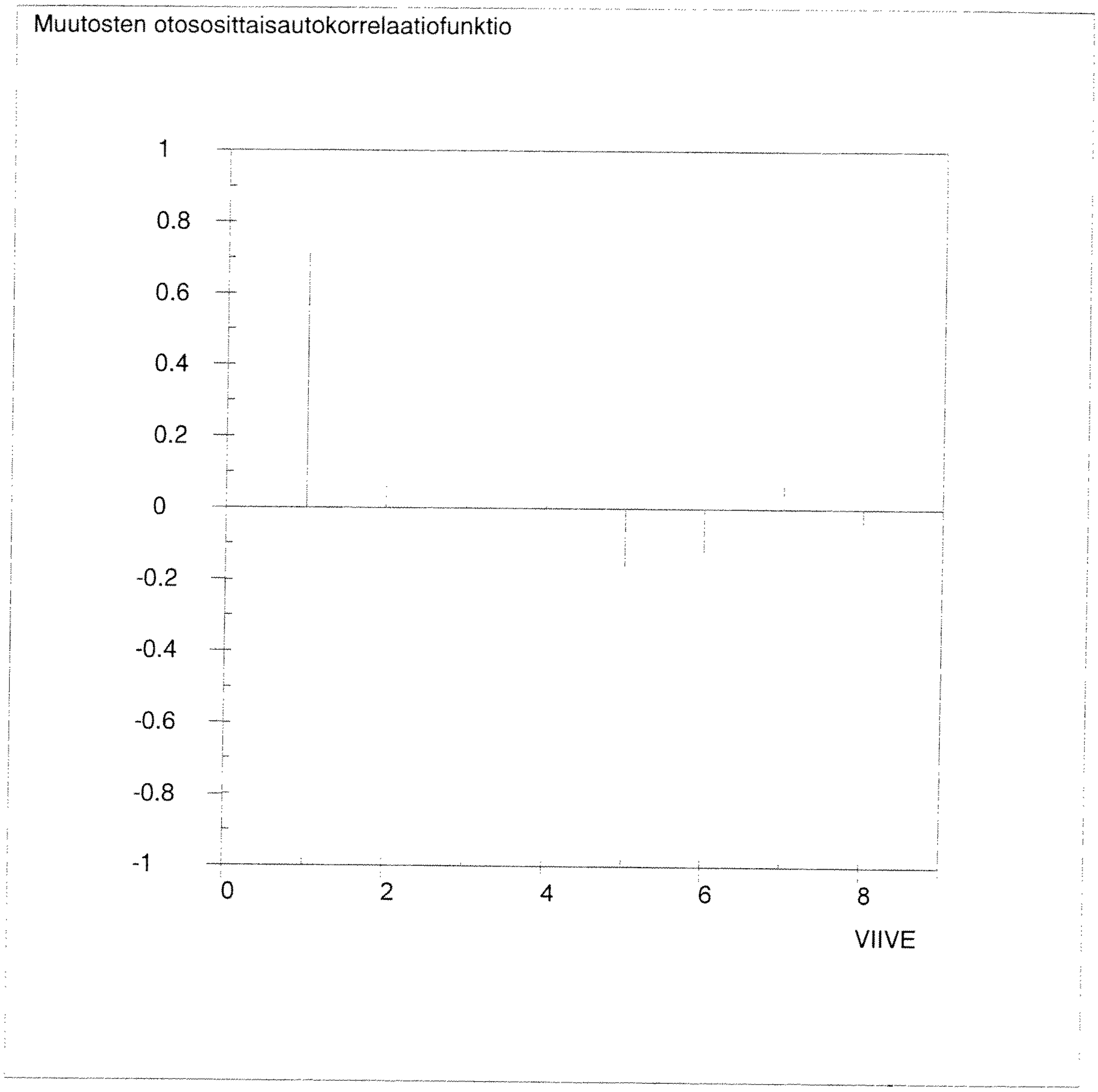

Muutosten otosautokorrelaatiofunktio
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
5
10
15
VIIVE

Figure 3:



Muutosten otososittaisautokorrelaatiofunktio
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
2
4
6
8
VIIVE

Figure 4:

Viive	Otosautokorrelaatio	Otososittaisautokorrelaatio
1	$0,71$	$0,71$
2	$0,53$	$0,06$
3	$0,40$	$0,01$
4	$0,30$	$0,01$
5	$0,16$	$-0,16$
6	$0,01$	$-0,14$
7	$-0,03$	$0,07$
8	$-0,08$	$-0,04$
9	$-0,05$	–
10	$-0,06$	–
11	$0,00$	–
12	$-0,12$	–
13	$-0,13$	–
14	$-0,17$	–
15	$-0,24$	–
16	$-0,23$	–

Malli	AIC
AR(1)	$-4,14137$
AR(2)	$-4,12110$
AR(3)	$-4,09707$
AR(4)	$-4,07210$
MA(1)	$-3,87644$
MA(2)	$-4,02999$
MA(3)	$-4,02399$
MA(4)	$-4,05895$
ARMA(1,1)	$-4,12105$
ARMA(2,1)	$-4,11899$
ARMA(1,2)	$-4,09696$
ARMA(2,2)	$-4,09493$

Aputuloksia:

2. asteen polynomin $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ juurten ratkaisukaava:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

STATIONAARISET AIKASARJAT, 8–10 OP. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–6. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Yleistentti 24.1.2008

Aineopintoja tenttivät vastaavat kolmeen kysymykseen; maisteriopintoja tenttivät kolmeen neljästä ensimmäisestä kysymyksestä sekä viimeiseen kysymykseen (pl. ne, jotka ovat erikseen sopineet harjoitustyön tekemisestä). Kukin tehtävistä on kuuden pisteen arvoinen. Palauta kysymyspaperi. Kiitos!

1. Hallin ja Saidi (2007)[2] estimoivat (reaaliselle) bruttokansantuotteelle ($\Delta y_{1t} = y_{1t} - y_{1t-1}$) ja (nimelliselle lyhyelle) korolle (y_{2t}) Kanadassa mallit

$$\Delta y_{1t} = 2552,456 + 0,345\Delta y_{1t-1} + \hat{\varepsilon}_{1t}, \quad \hat{\sigma}_1 = 3545,353$$

ja

$$y_{2t} = 1,298 + 0,872 y_{2t-1} + \hat{\varepsilon}_{2t} - 0.307\hat{\varepsilon}_{2t-1}, \quad \hat{\sigma}_2 = 1,273.$$

Yllä $\varepsilon_t \sim \mathsf{IID}(0, \sigma_i^2)$, "^" osoittaa estimoitua suuretta ja $\hat{\sigma}_i$ on vastaavan estimoidun innovaation keskihajonta ($i = 1,2$). Havainnot ovat neljännesvuosittaisia 1970–1989 (80 havaintoa). Mallit läpäisevät diagnostiset testit. Oletetaan onnellinen tilanne, että mallit täsmäävät täydellisesti aineistot tuottaneiden prosessien kanssa.

a) Ovatko prosessit Δy_{1t} ja y_{2t} heikosti stationaarisia? Perustele.

b) Laske prosessien odotusarvot $\mathsf{E}(\Delta y_{1t})$ ja $\mathsf{E}(y_{2t})$. Ovatko odotusarvot vakioita? Perustele.

c) Selitä huolellisesti, miten prosessien autokorrelaatiofunktiot käyttäytyvät (yksityiskohtaista kaavaa ei tarvitse muistaa jälkimmäisen prosessin kohdalla). Laske Δy_{1t}:n neljä ensimmäistä autokorrelaatiota. Saat ylimääräisen pisteen, jos osaat laskea y_{2t}-prosessin neljä ensimmäistä autokorrelaatiota.

2. Tutkitaan edellisen tehtävän prosessien ennustamista. Olkoot aikasarjojen viimeiset tunnetut arvot $\Delta y_{1T} = 4000$ ja $y_{2T} = 10$. Koska prosessien parametrit ovat tunnettuja, voidaan helposti laskea jälkimmäisen prosessin viimeisen innovaation ε_{2T} arvo. Olkoon se 1. Laske ennusteet eli ehdolliset odotusarvot $\mathsf{E}(\Delta y_{1t+1}|\Delta y_{1t}, \Delta y_{1t-1}, \ldots)$, $\mathsf{E}(\Delta y_{1t+2}|\Delta y_{1t}, \Delta y_{1t-1}, \ldots)$, $\mathsf{E}(y_{2t+1}|y_{2t}, y_{2t-1}, \ldots)$ ja $\mathsf{E}(y_{2t+2}|y_{2t}, y_{2t-1}, \ldots)$. (Vihje1: Wiener–Kolmogorov-kaava. Vihje2: $\hat{y}_{t+s|t} - \mu = \phi(\hat{y}_{t+s-1|t} - \mu)$, jos $s = 2, 3, \ldots$ Vihje3: $\phi + \theta = \phi(1 + \theta L) + \theta(1 - \phi L)$.) Konvergoivatko ennusteet johonkin lukuihin ennusteajanjakson etääntyessä kohti ääretöntä ja jos konvergoivat niin mihin?

[2] Optimal Tests of Noncorrelation Between Multivariate Time Series. *J. American Statistical Association*, 102, 938–951.

3.

a) Eräässä opinnäytteessä kirjoitettiin: "Lisäksi ARMA(p,q)-prosessien tapauksessa täytyy tehdä rajoitus, että AR- ja MA-osan parametrejä ei ole samansuuruisia, koska tämä aiheuttaisi ongelmia yritettäessä estimoida parametrien arvoja ks. esim. Hamilton 1994, 60–61)." Pitääkö väite paikkansa. Perustele.

b) Esitä Wiener–Kolmogorov-kaava, ja selitä sen käyttötarkoitus.

c) Tehtäväsi on mallittaa empiirinen aikasarja ARMA(p, q)-mallilla. Selitä ja perustele miten asteet p ja q voidaan määritellä ososautokorrelaatio- ja otososittaisautokorrelaatiofunktioiden avulla. Selitä niihin liittyvä jakaumateoria huolellisesti.

4. Saakoon prosessin $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ alkuarvo y_0 arvon 1 todennäköisyydellä 1/2 ja arvon -1 todennäköisyydellä 1/2. Myöhemmät y_t:n arvot määräytyvät kaavan

$$y_t = (-1)^t y_0, \quad t = 1, 2, \ldots,$$

mukaisesti.

a) Johda y_t:n odotusarvo, varianssi ja autokovarianssifunktio.

b) Onko y_t heikosti stationaarinen prosessi? Perustele. Kuoleentuuko stationaarisen prosessin autokorrelaatiofunktio aina suurilla viipeillä?

c) Johda ennuste yllä olevaa kaavaa noudattavalle y_{t+1}:lle käyttämällä keskineliövirheen mielessä optimaalisen lineaarisen ennusteen yleisiä tuloksia ja ehdollistavana informaationa y_t:tä (ei vakiota). (Voit tietenkin johtaa myös edellä mainitun yleisen tuloksen, jos haluat.) Mikä on ennusteen keskineliövirhe?

5. Olkoon prosessi heikosti stationaarinen ja sen autokovarianssit (γ_j) absoluuttisesti summautuvia.

a) Määrittele prosessin populaatiospektri. Tulkitse se sanoin.

b) Olkoon prosessi lisäksi *i)* MA(∞) tai *ii)* ARMA(p,q). Esitä populaatiospektrit nimenomaan näille prosesseille.

c) Määrittele ja kuvaa, millaisia ovat populaatiospektrit, kun prosessi on *i)* valkoista kohinaa *ii)* MA(1), jossa MA-parametri $\theta > 0$ tai $\theta < 0$ ja *iii)* AR(1), jossa AR-parametri $\phi > 0$ tai $\phi < 0$. Tulkitse spektrit sanoin.

Aputulos:

$$\begin{aligned} \exp(i\omega) &= \cos(\omega) + i\sin(\omega), \\ \exp(-i\omega) &= \cos(\omega) - i\sin(\omega). \end{aligned}$$

STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP

Yleistentti 3.3.2008

Vastaa kaikkiin tehtäviin. Kukin tehtävä on kuuden pisteen arvoinen. Palauta kysymykset.

1. Sovitetaan AR-malleja (logaritmoidun henkeä kohti lasketun reaalisen) Suomen bruttokansantuotteen muutoksiin (y_t) 1975–2002 (vuosihavaintoja). AR(2)-malli sopii (ns. informaatiokriteerien mukaan) parhaiten aineistoon. (Pienimmän neliösumman menetelmällä) estimoitu AR(2)-malli on

$$y_t = 0,013 + 0,84y_{t-1} - 0,41y_{t-2} + \hat{\varepsilon}_t$$

ilmeisin merkinnöin. Oletetaan onnellinen tilanne, että estimoitu malli on sama kuin prosessi (parametrien estimaatit ovat parametrien todelliset arvot ja estimoitu innovaatio on todellinen valkoista kohinaa oleva innovaatio).

a) Mikä on prosessiin liittyvä karakteristinen yhtälö? Ovatko yhtälön juuret kompleksisia? Miten juurten kompleksisuus vaikuttaisi yhtälön impulssivastefunktioon?

b) Onko prosessi heikosti stationaarinen? Perustele. (Voit sivuuttaa alkuarvojen mahdollisen vaikutuksen heikkoon stationaarisuuteen.)

c) Laske prosessin odotusarvo.

d) Kuvaile miten prosessin autokorrelaatiot käyttäytyvät. Perustele.

2. Olkoon $\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ valkoista kohinaa ($\mathsf{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathsf{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 > 0$ ja $\mathsf{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-j}) = 0$, kun $j \neq 0$). Muodostetaan uudet prosessit $y_t = (-1)^t\varepsilon_t$ ja $z_t = y_t + \varepsilon_t$, joissa yhtälöissä $t = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

a) Onko y_t heikosti stationaarinen? Todista.

b) Onko z_t heikosti stationaarinen? Todista.

3.

a) Noudattakoon aikasarja y_t, $t = 1, \ldots, T$, AR(1)-prosessia

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

jossa c on vakio ja $\varepsilon_t \sim \mathsf{NID}(0, \sigma^2)$. Määrittele ja perustele malliin liittyvä (kirjassa esitetty) ehdollinen uskottavuusfunktio. Miten malli estimoidaan sen avulla?

b) Noudattakoon aikasarja y_t, $t = 1, \ldots, T$, MA(1)-prosessia

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1},$$

jossa μ on vakio ja $\varepsilon_t \sim \mathsf{NID}(0, \sigma^2)$. Määrittele ja perustele malliin liittyvä (kirjassa esitetty) ehdollinen uskottavuusfunktio. Miten malli estimoidaan sen avulla? Vaikuttaako θ:n suuruus estimointiin, ja jos vaikuttaa niin miten? Perustele.

4.

a) Olkoon prosessi heikosti stationaarinen ja sen autokovarianssit (γ_j) absoluuttisesti summautuvia. Oletetaan, että populaatiospektri

$$s_Y(\omega) = (2\pi)^{-1}[\gamma_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(\omega j)]$$

(ilmeisin merkinnöin) tunnetaan ω:n arvoilla välillä $[0, \pi]$. Selitä, miksi $s_Y(\omega)$ tunnetaan tällöin myös kaikilla muilla ω:n arvoilla.

b) Selitä, mikä on populaatiospektrin matalin merkityksellinen taajuus ja miksi. Mikä on tähän taajuuteen liittyvä periodin pituus?

c) Määrittele periodogrammi.

d) Selitä periodogrammin ominaisuudet spektrin estimaattorina pääpiirtein.

e) Esittele jokin periodogrammia kehittyneempi spektrin estimointimenetelmä.

f) Olkoon kuukausihavaintojen lukumäärä $T = 513$, spektri estimoitu ja esitetty siten (kuten kirjassa), että vaaka-akselille ei ole merkitty taajuutta $\omega_j = 2\pi j/T$ vaan j. Arvolla $j = 18$ on estimoidussa spektrissä huippu. Mikä on taajuus, ja mikä on siihen liittyvän periodin pituus? Tulkitse laskemasi luvut sanoin.

Aputuloksia:

2. asteen polynomin $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ juurten ratkaisukaava:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$\begin{aligned} \exp(i\omega) &= \cos(\omega) + i\sin(\omega), \\ \exp(-i\omega) &= \cos(\omega) - i\sin(\omega). \end{aligned}$$

STATIONAARISET AIKASARJAT, 8–10 OP. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–6. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Kesätentti 14.8.2008

Aineopintoja tenttivät vastaavat kolmeen kysymykseen; maisteriopintoja tenttivät kolmeen neljästä ensimmäisestä kysymyksestä sekä viimeiseen kysymykseen (pl. ne, jotka ovat erikseen sopineet harjoitustyön tekemisestä). Kukin tehtävistä on kuuden pisteen arvoinen. Palauta kysymyspaperi. Kiitos!

1. Hallin ja Saidi (2007)[1] estimoivat (reaaliselle) bruttokansantuotteelle ($\Delta y_{1t} = y_{1t} - y_{1t-1}$) ja (nimelliselle lyhyelle) korolle (y_{2t}) Kanadassa mallit

$$\Delta y_{1t} = 2552,456 + 0,345\Delta y_{1t-1} + \hat{\varepsilon}_{1t}, \quad \hat{\sigma}_1 = 3545,353$$

ja

$$y_{2t} = 1,298 + 0,872 y_{2t-1} + \hat{\varepsilon}_{2t} - 0,307\hat{\varepsilon}_{2t-1}, \quad \hat{\sigma}_2 = 1,273.$$

Yllä $\varepsilon_t \sim \mathsf{IID}(0,\sigma_i^2)$, "^" osoittaa estimoitua suuretta ja $\hat{\sigma}_i$ on vastaavan estimoidun innovaation keskihajonta ($i = 1,2$). Havainnot ovat neljännesvuosittaisia 1970–1989 (80 havaintoa). Mallit läpäisevät diagnostiset testit. Oletetaan onnellinen tilanne, että mallit täsmäävät täydellisesti aineistot tuottaneiden prosessien kanssa.

a) Ovatko prosessit Δy_{1t} ja y_{2t} heikosti stationaarisia? Perustele.

b) Laske prosessien odotusarvot $\mathsf{E}(\Delta y_{1t})$ ja $\mathsf{E}(y_{2t})$. Ovatko odotusarvot vakioita? Perustele.

c) Selitä huolellisesti, miten prosessien autokorrelaatiofunktiot käyttäytyvät (yksityiskohtaista kaavaa ei tarvitse muistaa jälkimmäisen prosessin kohdalla). Laske Δy_{1t}:n neljä ensimmäistä autokorrelaatiota. Saat ylimääräisen pisteen, jos osaat laskea y_{2t}-prosessin neljä ensimmäistä autokorrelaatiota.

2. Tutkitaan edellisen tehtävän prosessien ennustamista. Olkoot aikasarjojen viimeiset tunnetut arvot $\Delta y_{1T} = 4000$ ja $y_{2T} = 10$. Koska prosessien parametrit ovat tunnettuja, voidaan helposti laskea jälkimmäisen prosessin viimeisen innovaation ε_{2T} arvo. Olkoon se 1. Laske ennusteet eli ehdolliset odotusarvot $\mathsf{E}(\Delta y_{1t+1}|\Delta y_{1t}, \Delta y_{1t-1}, \ldots)$, $\mathsf{E}(\Delta y_{1t+2}|\Delta y_{1t}, \Delta y_{1t-1}, \ldots)$, $\mathsf{E}(y_{2t+1}|y_{2t}, y_{2t-1}, \ldots)$ ja $\mathsf{E}(y_{2t+2}|y_{2t}, y_{2t-1}, \ldots)$. (Vihje1: Wiener–Kolmogorov-kaava. Vihje2: $\hat{y}_{t+s|t} - \mu = \phi(\hat{y}_{t+s-1|t} - \mu)$, jos $s = 2, 3, \ldots$ Vihje3: $\phi + \theta = \phi(1 + \theta L) + \theta(1 - \phi L)$.) Konvergoivatko ennusteet johonkin lukuihin ennusteajanjakson etääntyessä kohti ääretöntä ja jos konvergoivat niin mihin?

[1] Optimal Tests of Noncorrelation Between Multivariate Time Series. *J. American Statistical Association*, 102, 938–951.

3.

a) Eräässä opinnäytteessä kirjoitettiin: "Lisäksi ARMA(p,q)-prosessien tapauksessa täytyy tehdä rajoitus, että AR- ja MA-osan parametrejä ei ole samansuuruisia, koska tämä aiheuttaisi ongelmia yritettäessä estimoida parametrien arvoja (ks. esim. Hamilton 1994, 60–61)." Pitääkö väite paikkansa. Perustele.

b) Esitä Wiener–Kolmogorov-kaava, ja selitä sen käyttötarkoitus.

c) Tehtäväsi on mallittaa empiirinen aikasarja ARMA(p,q)-mallilla. Selitä ja perustele miten asteet p ja q voidaan määritellä ososautokorrelaatio- ja otososittaisautokorrelaatiofunktioiden avulla. Selitä niihin liittyvä jakaumateoria huolellisesti.

4. Saakoon prosessin $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ alkuarvo y_0 arvon 1 todennäköisyydellä 1/2 ja arvon -1 todennäköisyydellä 1/2. Myöhemmät y_t:n arvot määräytyvät kaavan

$$y_t = (-1)^t y_0, \quad t = 1, 2, \ldots,$$

mukaisesti.

a) Johda y_t:n odotusarvo, varianssi ja autokovarianssifunktio.

b) Onko y_t heikosti stationaarinen prosessi? Perustele. Kuoleentuuko stationaarisen prosessin autokorrelaatiofunktio aina suurilla viipeillä?

c) Johda ennuste yllä olevaa kaavaa noudattavalle y_{t+1}:lle käyttämällä keskineliövirheen mielessä optimaalisen lineaarisen ennusteen yleisiä tuloksia ja ehdollistavana informaationa y_t:tä (ei vakiota). (Voit tietenkin johtaa myös edellä mainitun yleisen tuloksen, jos haluat.) Mikä on ennusteen keskineliövirhe?

5. Olkoon prosessi heikosti stationaarinen ja sen autokovarianssit (γ_j) absoluuttisesti summautuvia.

a) Määrittele prosessin populaatiospektri. Tulkitse se sanoin.

b) Olkoon prosessi lisäksi *i)* MA(∞) tai *ii)* ARMA(p,q). Esitä populaatiospektrit nimenomaan näille prosesseille.

c) Määrittele ja kuvaa, millaisia ovat populaatiospektrit, kun prosessi on *i)* valkoista kohinaa *ii)* MA(1), jossa MA-parametri $\theta > 0$ tai $\theta < 0$ ja *iii)* AR(1), jossa AR-parametri $\phi > 0$ tai $\phi < 0$. Tulkitse spektrit sanoin.

Aputulos:

$$\begin{aligned} \exp(i\omega) &= \cos(\omega) + i\sin(\omega), \\ \exp(-i\omega) &= \cos(\omega) - i\sin(\omega). \end{aligned}$$