STATIONAARISET AIKASARJAT, 8 (10) OP. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 (ja 6). Kuulustelija: Yliopistonlehtori Pekka Pere.

7.3.

Laitostentti [redacted].2006

Aineopintojen tenttijöiden tulee vastata kolmeen kysymykseen ja maisteriopintojen tenttijöiden kaikkiin kysymyksiin. Kukin tehtävä on kuuden pisteen arvoinen. Palauta kysymykset.

1. Noudattakoon y_t AR(2)-prosessia

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t,$$

jossa $\phi_1 = 1/2$, $\phi_2 = 3/16$, ε_t on valkoista kohinaa ($\mathsf{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathsf{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 > 0$ ja $\mathsf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0$, kun $j \neq 0$) ja $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

a) Mikä on prosessiin liittyvä karakteristinen yhtälö?

b) Onko prosessi heikosti stationaarinen? Perustele.

c) Osoita hajotelman $1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L)$ paikkansapitävyys annetuilla parametriarvoilla. Edellä λ_1 ja λ_2 ovat karakteristisen yhtälön juuret.

d) Esitä rekursiivinen kaava prosessin autokorrelaatioille ρ_j. Osoita kaavan avulla, että $\rho_1 = \phi_1/(1 - \phi_2)$.

e) Laske numeeriset arvot autokorrelaatioille viipeille 1, 2 ja 3.

f) Kuvaile miten autokorrelaatiofunktio käyttäytyy paitsi laskemillasi myös niitä suuremmilla arvoilla. Selitä, miten λ_1- ja λ_2-juurten reaalisuus tai kompleksisuus selittää autokorrelaatioiden käyttäytymistä.

2. Saakoon prosessin $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ alkuarvo y_0 arvon 1 todennäköisyydellä 1/2 ja arvon -1 todennäköisyydellä 1/2. Myöhemmät y_t:n arvot määräytyvät kaavan

$$y_t = (-1)^t y_0, \quad t = 1, 2, \ldots,$$

mukaisesti.

a) Johda y_t:n odotusarvo, varianssi ja autokovarianssifunktio.

b) Onko y_t heikosti stationaarinen prosessi? Perustele. Kuoleentuuko stationaarisen prosessin autokorrelaatiofunktio aina suurilla viipeillä?

c) Johda ennuste yllä olevaa kaavaa noudattavalle y_{t+1}:lle käyttämällä keskineliövirheen mielessä optimaalisen lineaarisen ennusteen yleisiä tuloksia ja ehdollistavana informaationa y_t:tä (ei vakiota). (Voit tietenkin johtaa myös edellä mainitun yleisen tuloksen, jos haluat.) Mikä on ennusteen keskineliövirhe?

3.

a) Noudattakoon aikasarja y_t, $t = 1, \ldots, T$, AR(1)-prosessia

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

jossa c on vakio ja ε_t $\sim$NID$(0,\sigma^2)$. Määrittele ja perustele malliin liittyvä (kirjassa esitetty) ehdollinen uskottavuusfunktio. Miten malli estimoidaan sen avulla?

b) Noudattakoon aikasarja y_t, $t = 1, \ldots, T$, MA(1)-prosessia

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1},$$

jossa μ on vakio ja ε_t $\sim$NID$(0,\sigma^2)$. Määrittele ja perustele malliin liittyvä (kirjassa esitetty) ehdollinen uskottavuusfunktio. Miten malli estimoidaan sen avulla? Vaikuttaako θ:n suuruus estimointiin, ja jos vaikuttaa niin miten? Perustele.

4. Olkoon prosessi heikosti stationaarinen ja sen autokovarianssit (γ_j) absoluuttisesti summautuvia.

a) Määrittele prosessin populaatiospektri. Tulkitse se sanoin.

b) Olkoon prosessi lisäksi *i)* MA(∞) tai *ii)* ARMA(p,q). Esitä populaatiospektrit nimenomaan näille prosesseille.

c) Määrittele ja kuvaa, millaisia ovat populaatiospektrit, kun prosessi on *i)* valkoista kohinaa *ii)* MA(1), jossa MA-parametri $\theta > 0$ tai $\theta < 0$ ja *iii)* AR(1), jossa AR-parametri $\phi > 0$ tai $\phi < 0$. Tulkitse spektrit sanoin.

Aputulos:

2. asteen polynomin $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ juurten ratkaisukaava:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$