STATIONAARISET AIKASARJAT. 8–10 OP. 10.9.–3.12.2007. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 (ja 6). Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

1. välikoe 29.10.2007

Kukin tehtävä on kuuden pisteen arvoinen. Vastaa kolmeen kysymykseen. Mikäli vastaat useampaan, merkitse selkeästi, mitkä tehtävät arvostellaan. Palauta kysymyspaperi. Kiitos!

1. Noudattakoon muuttuja y_t (ei välttämättä satunnainen) p. asteen differenssiyhtälöä

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

(ilmeisin merkinnöin).

a) Milloin yhtälön ratkaisu on stabiili?

b) Mitä tarkoitetaan tämän differenssiyhtälön impulssivasteella (dynamic multiplier)?

c) Oletetaan, että w_t:ssä tapahtuu pysyvä muutos. Miten y_t:n pitkän aikavälin ratkaisu muuttuu ja miten impulssivasteet liittyvät ratkaisuun?

2. Olkoon $\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ valkoista kohinaa, eli $\mathsf{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathsf{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 > 0$ ja $\mathsf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0$, kun $j \neq 0$. Muodostetaan uudet prosessit $y_t = (-1)^t \varepsilon_t$ ja $z_t = y_t + \varepsilon_t$, joissa yhtälöissä $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

a) Onko y_t heikosti stationaarinen? Onko se valkoista kohinaa?

b) Onko z_t heikosti stationaarinen? Onko kahden heikosti heikosti stationaarisen prosessin summa aina heikosti stationaarinen? Perustele.

3. Noudattakoon y_t AR(2)-prosessia

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t,$$

jossa $\phi_1 = 1/2$, $\phi_2 = 3/16$, ε_t on valkoista kohinaa ($\mathsf{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathsf{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 > 0$ ja $\mathsf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0$, kun $j \neq 0$) ja $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

a) Mikä on prosessiin liittyvä karakteristinen yhtälö?

b) Onko prosessi heikosti stationaarinen? Perustele.

c) Osoita hajotelman $1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L)$ paikkansapitävyys annetuilla parametriarvoilla. Edellä λ_1 ja λ_2 ovat karakteristisen yhtälön juuret.

d) Esitä rekursiivinen kaava prosessin autokorrelaatioille ρ_j. Osoita kaavan avulla, että $\rho_1 = \phi_1/(1 - \phi_2)$.

e) Laske numeeriset arvot autokorrelaatioille viipeille 1, 2 ja 3.

f) Kuvaile miten autokorrelaatiofunktio käyttäytyy paitsi laskemillasi myös niitä suuremmilla arvoilla. Selitä, miten λ_1- ja λ_2-juurten reaalisuus tai kompleksisuus selittää autokorrelaatioiden käyttäytymistä.

4. Noudattakoon $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ MA(1)-prosessia

$$y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1},$$

jossa ε_t on valkoista kohinaa ($\mathsf{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathsf{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 > 0$ ja $\mathsf{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-j}) = 0$, kun $j \neq 0$).

a) Vaikuttaako θ-parametrin suuruus prosessin stationaarisuuteen, ja jos vaikuttaa, niin miten? Perustele.

b) Johda prosessin odotusarvo, varianssi ja autokorrelaatiofunktio.

c) Mitä tarkoitetaan MA-prosessin käännettävyydellä (invertibility)? Milloin MA(1)-prosessi on kääntyvä?

Aputulos: 2. asteen polynomin $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) juurten ratkaisukaava:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$