Sovelletun analyysin peruskurssi

Koe 24.01.2008

1. Olkoon $C(I)$ välillä $I = [-1, 1]$ jatkuvien reaaliarvoisten funktioiden muodostama vektoriavaruus. Varustetaan se normilla

$$\|f\| = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx.$$

Onko olemassa sisätuloa, jonka määräämä tämä normi olisi? Onko $C(I)$ täydellinen tämän normin suhteen? Perustele vastauksesi.

2. Olkoon $A : H \to H$ Hilbert–avaruuden H jatkuva lineaarikuvaus, joka on *alhaalta rajoitetttu*, eli

$$\|Ax\| \geq c\|x\|, \quad x \in H,$$

jollain positiivisella vakiolla c. Osoita, että A on injektio ja että sen kuva–avaruus on suljettu.

3. Laske välin $[-2, 2]$ karakteristisen funktion Fourier–muunnos.

4. Laske funktion $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $g(t) = |t|$, Fourier–sarja.

5. Olkoon X Banach–avaruus, ja $B : X \times X \to X$ rajoitettu bilineaarikuvaus, eli jokaisella kiinteällä x_0 kuvaukset

$$x \mapsto B(x, x_0), \qquad x \mapsto B(x_0, x),$$

ovat lineaarisia, ja jollain vakiolla C pätee

$$\|B(x, y)\| \leq C\|x\|\,\|y\|, \quad x, y \in X.$$

Laske kuvauksen $x \mapsto B(x, x)$ derivaatta.

Sovelletun analyysin peruskurssi

Koe 20.05.2008

1. (a) Selitä, mikä on *Projektioteoreeman* sisältö.

   (b) Olkoon P ortogonaaliprojektio Hilbert–avaruudessa H. Osoita, että
   $$(Px, y) = (x, Py), \quad x,\, y \in H.$$

2. (Laskareista) Olkoot X ja Y Banach–avaruuksia. Tarkastellaan jatkuvien lineaarikuvausten muodostamaa Banach–avaruutta $\mathcal{L}(X,Y)$. Osoita että kääntyvien lineaarikuvausten joukko $X \to Y$ on $\mathcal{L}(X,Y)$:n avoin osajoukko.

   Vihje: Olkoot A kääntyvä. Tarkastele kuvausta $A+R = A(id+A^{-1}R)$ ja osoita käyttäen Neumann–sarjaa että tämä on kääntyvä jos $\|R\|$ on riittävän pieni.

3. Laske funktion $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $g(t) = 2 - t/|t|$, Fourier–sarja.

4. Laske funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto te^{-|t|}$ Fourier–muunnos.

5. Olkoon $f(t) = 1+t$, kun $t \in [-1, 0]$, $f(t) = 1-t$, kun $t \in [0, 1]$ ja nolla muulloin. Laske $\hat{f}$.

Sovelletun analyysin peruskurssi

Koe 12.06.2008

1. (a) Selitä, mikä on *Projektioteoreeman* sisältö.
   (b) Olkoon $P \neq 0$ ortogonaaliprojektio Hilbert–avaruudessa H. Määritä sen normi.

2. Olkoon $A : H \to H$ Hilbert–avaruuden H jatkuva lineaarikuvaus, joka on *alhaalta rajoitetttu*, eli
$$\|Ax\| \geq c\|x\|, \quad x \in H,$$
jollain positiivisella vakiolla c. Osoita, että A on injektio ja että sen kuva–avaruus on suljettu.

3. Oletetaan että (u_n) on numeroituva maksimaalinen ortonormaali perhe Hilbertin avaruudessa H, ja $(a_n) \in l^2$. Osoita, että on olemassa $x \in H$ jolle $\hat{x}(n) = a_n$ kaikilla n.

4. Laske funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto \chi_{[-1,1]}(t) \sin t$ Fourier–muunnos. Tässä $\chi_{[-1,1]}$ on välin $[-1, 1]$ karakteristinen funktio.

5. Osoita, että ehto $\phi \mapsto \phi * \phi$ määrittelee jatkuvan kuvauksen $f : L^1 \to L^1$, ja laske sen derivaatta.