

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS


Solmuteoriaa topologisesti

Tentti (neljän tunnin)

19. 5. 2009

Ohje: käsittele neljää tehtävää seuraavista. Pidä hauskaa!

- (a) Määrittele solmu ja taustaisotopia (ambient isotopy) ja hahmottele todistus sille, että tämä määrää ekvivalenssirelaation solmujen joukkoon. (3p)

(b) Määrittele sana *solmuinvariantti* ja osoita, että solmun komplementin perusryhmä on solmuinvariantti. (3p)
- (a) Esitä kolmiapilasolmun  komplementin perusryhmä jossain muodossa. (4p)

(b) Osoita, että kolmiapilasolmun peilikuvalla on isomorfinen ryhmä. (2p)
- (a) Määrittele solmun Seifertin pinta. (3p)

(b) Punoksille määritellään Seifertin pinta samalla tavalla kuin solmuille, sillä erolla, että n -komponentin punoksen Seifertin pinnalla on aina n reunakomponenttia. Anna esimerkki epätriviaalista kahden komponentin punoksesta, jolla on Seifertin pinta homeomorfinen avaruuden $S^1 \times I$ kanssa. Punos pitää osoittaa epätriviaaliksi. (3p)
- (Essee) Mitä tarkoittaa kesy solmu ja villi solmu? Muotoile Reidemeisterin lause. Miten Reidemeisterin lause suhtautuu villeihin solmuihin? (6p)
- Määritellään solmun k Eulerin karakteristika kaavalla

$$\chi(k) = \max\{\chi(S) \mid S \text{ on solmun } k \text{ Seifertin pinta}\}.$$

Osoita, että

$$\chi(k\#k') \geq \chi(k) + \chi(k') - 1. \quad (3p)$$


Pidetään tunnettuna, että

$$\chi(k\#k') \leq \chi(k) + \chi(k') - 1.$$

Määritellään $g(k) = \frac{1 - \chi(k)}{2}$. Todista että

$$g(k\#k') = g(k) + g(k'). \quad (1p)$$

Anna esimerkki alkusolmusta ja todista että se on alkusolmu (2p). Vinkki: triviaali solmu ei ole alkusolmu.

- Laske solmun  Seifertin matriisi (4p). Käyttällä jotain Seifertin matriisista tulevaa invarianttia osoita tämä solmu epätriviaaliksi (2p).