Tuomas Hytönen

Singulaariset integraalit ja Tb-lause – tentti 2.4.2009 (4 h)

Vastaa **neljään** (4) itse valitsemaasi kysymykseen. Kaikki ovat samanarvoisia.

Kirjoita jokaiseen palauttamaasi paperiin **kurssin nimi**, **päivämäärä**, **koko nimesi** sekä joko Helsingin yliopiston **opiskelijanumerosi** tai **syntymäaikasi**.

Kaikissa tehtävissä $\mathscr{D}$ tarkoittaa $\mathbb{R}^n$:n dyadisten kuutioiden joukkoa.

1. Singulaarisen integraalioperaattorin T analyysissä lauseke $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\mathbb{E}_k^{b_2})^* T\mathbb{D}_k^{b_1}$ hajotetaan edelleen kolmen eri tyyppisiksi osiksi:

   - operaattoreiksi Λ_m, jotka toimivat mukautetun Haarin kannan suhteen pisteittäisenä kertolaskuna, $\Lambda_m(b_1\varphi_{Q,u}^{b_1}) = \lambda_{Q,m,u}b_1\varphi_{Q,u}^{b_1}$ eräillä vakioilla $\lambda_{Q,m,u}$;
   - operaattoreiksi U_m, jotka kuvaavat Haarin funktiot $b_1\varphi_{Q,u}^{b_1}$ eräiksi toisiksi funktioksi; ja
   - paratulo-operaattoriksi.

   Selvitä formaalilla laskulla, kuinka tämä hajotelma tehdään; suppenemiskysymyksiin ei tässä tarvitse kiinnittää huomiota.

2. Olkoon $\psi : \mathscr{D} \to \mathscr{D}$ permutaatio, joka toteuttaa $\psi(Q) \neq Q$ ja $|\psi(Q)| = |Q|$ kaikilla $Q \in \mathscr{D}$. Olkoon $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ pseudoakkretiivinen funktio, ja merkitään

   $$\omega_{Q,\psi} := |Q|^{1/2}\Big(\frac{1_{\psi(Q)}}{b(\psi(Q))} - \frac{1_Q}{b(Q)}\Big), \qquad \Big(b(E) := \int_E b(x)\,\mathrm{d}x\Big).$$

   Olkoot $Q, R \in \mathscr{D}$ kaksi *ψ-yhteensopivaa* (compatible) kuutioita. Määrittele, mitä tällä tarkoitetaan. Kun oletetaan lisäksi, että joukot $Q \cup \psi(Q)$ ja $R \cup \psi(R)$ leikkaavat, osoita, että kaikilla $S \in \mathscr{D}$ on korkeintaan toinen lausekkeista $\mathbb{D}_S^b(b\omega_{Q,\psi})$ ja $\mathbb{D}_S^b(b\omega_{R,\psi})$ nollasta poikkeava.

3. Olkoon $\mathscr{T} \subset \mathscr{D}$ dyadisten kuutioiden "harva" osakokoelma, seuraavassa mielessä: on olemassa $\tau \in (0,1)$, niin että kaikilla $Q \in \mathscr{T}$ pätee $\Big|\bigcup_{\substack{R\in\mathscr{T}\\ R\subset Q}} R\Big| \leq (1-\tau)|Q|$. (Tässä $\subset$ tarkoittaa aitoa osajoukkoa. Huomaa, että yllä olevan yhdisteen ei tarvitse olla erillinen.) Osoita, että kaikilla $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on tällöin voimassa

   $$\sum_{Q\in\mathscr{T}} \|\mathbb{E}_Q f\|_2^2 \leq C\|f\|_2^2$$

   jollakin vakiolla $C < \infty$, joka riippuu ainoastaan τ:sta.

4. Tarkastellaan seuraavaa, erääseen Tb-lauseen versioon liittyvää tilannetta: Kutakin kuutioita $Q \in \mathscr{D}$ kohti on annettu funktio $b_Q \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, joka toteuttaa $\operatorname{supp} b_Q \subseteq Q$ ja $|Q|^{-1}|\int_Q b_Q(x)\,\mathrm{d}x| \geq \delta > 0$. Olkoot Q_i, $i = 1,\ldots,2^n$, annetun dyadisen kuution $Q \in \mathscr{D}$ ne dyadiset alikuutiot $R \in \mathscr{D}$, joilla $\ell(R) = \frac{1}{2}\ell(Q)$ (numeroituna jossakin järjestyksessä). Määritellään operaattori

   $$\Delta_Q := \sum_{i=1}^{2^n} \mathbb{E}_{Q_i}^{b_{Q_i}} - \mathbb{E}_Q^{b_Q}.$$

   Osoita, että kaikilla $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pätee $(\Delta_Q)^2 f = \Delta_Q f + \sigma_Q\langle f\rangle_Q$, missä σ_Q on eräs Q:lla kannatettu funktio, joka ei riipu f:stä.

5. Olkoon $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ rajoitettu singulaarinen integraalioperaattori, jolla on standardiehdot toteuttava ydin. Selvitä, kuinka määritellään Tf, kun $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Osoita, että $Tf \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ja jopa (vetoamatta Johnin ja Nirenbergin epäyhtälöön) $Tf \in \mathrm{BMO}^2(\mathbb{R}^n)$.