Sijoitustoiminnan matematiikka 9.8.2007

1. Olkoon korkorakennemalli sellainen, että hetkellä k vuosikorko on I_k kaiken mittaisille korkosopimuksille, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Mallissa I_0 on ei-negatiivinen vakio ja $I_1, I_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia, joiden varianssi on positiivinen. Osoita, että markkinoilla on arbitraasimahdollisuus.

2. Osoita, että kahden periodin arvopaperimarkkinamalli on arbitraasivapaa, jos riskineutraali mitta on olemassa.

3. Oletetaan, että markkinoilla on yksi riskitön ja joukko riskillisiä arvopapereita. Odotustuottoa $r \geq 1$ vastaava minimaalinen riskillisten arvopapereiden allokoinnin antaman tuottoasteen varianssi on

$$\sigma^2(r) = r^2 - 2r + 2.$$

Olkoon Capital asset pricing -mallin mukaisen markkinasalkun odotustuotto 3.

a) Mikä on markkinoiden riskitön korko.

b) Määrää odotustuottoa $r = 2$ vastaava minimaalinen tuottoasteen varianssi (allokointi voi sisältää myös riskittömiä arvopapereita).

4. Markkinoilla on arvopaperit $1, \ldots, N$ ja näihin liittyvät hetken yksi arvot $S_1(1), \ldots, S_N(1)$. Markkinoilla on $K \geq 1$ identtistä toimijaa ts. alkuallokoinnit ja utiliteettifunktiot ovat samat kaikilla toimijoilla. Osoita, että markkinoilla on tasapainotila, kun yhteinen utiliteettifunktio oletetaan aidosti kasvavaksi ja konkaaviksi.

5. Osoita, että jälleenvakuutusmarkkinoiden tasapainotila on aina Pareto-optimaalinen tila.

Sijoitustoiminnan matematiikka 13.5.2008

1. Tarkastellaan markkinoita, joilla on kaksi arvopaperia. Arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i > 0$. Arvopaperi 2 on osake, jonka hinta hetkellä nolla on p ja hetken yksi mahdolliset arvot α ja β, missä $0 < \alpha < \beta$. Millä ehdoilla markkinat ovat arbitraasivapaat. Perustelu?

2. Osoita, että kahden periodin markkinamalli on arbitraasivapaa, jos riskineutraali todennäköisyysmitta on olemassa.

3. Oletetaan, että markkinoilla on yksi riskitön ja joukko riskillisiä arvopapereita. Odotustuottoa $r \geq 1$ vastaava minimaalinen riskillisten arvopapereiden allokoinnin antaman tuottoasteen varianssi on

$$\sigma^2(r) = r^2 - 2r + 2.$$

Olkoon markkinoiden riskitön korko $i = 1/2$.

a) Määrää Capital asset pricing -mallin mukaisen markkinasalkun odotustuotto ja varianssi.

b) Sijoittaja muodostaa salkun, jonka odotustuotto on 2. Määrää tätä vastaava minimaalinen tuottoasteen varianssi.

4. Olkoot markkinoilla arvopaperit $1, \ldots, N$ ja näihin liittyvät hetken yksi arvot $S_1(1), \ldots, S_N(1)$. Oletetaan, että markkinat ovat täydelliset. Markkinoilla on K toimijaa. Utiliteettifunktiot määräytyvät ehdoista

$$u_k(z) = \mu_k^{-1}(1 - e^{-\mu_k z}), \quad z \in \mathbf{R}, \quad k = 1, \ldots, K,$$

missä $\mu_1, \ldots, \mu_K$ ovat positiivisia vakioita. Merkitään $\mu = (\sum_{k=1}^K \mu_k^{-1})^{-1}$. Olkoon $A(1)$ markkinoiden kokonaisarvo hetkellä yksi. Osoita, että jokainen Pareto-optimaalinen allokointi $(\theta^1, \ldots, \theta^K)$ täyttää ehdot

$$S(1)\theta^k = \frac{\mu A(1)}{\mu_k} + b_k, \quad k = 1, \ldots, K,$$

missä $b_1, \ldots, b_K$ ovat vakioita ja $\sum_{k=1}^K b_k = 0$.

5. Olkoot jälleenvakuutusmarkkinoiden toimijoiden utiliteettifunktiot u_k muotoa

$$u_k(z) = \alpha_k z + \beta_k, \quad z \in \mathbf{R},$$

missä $\alpha_k > 0$ ja $\beta_k \in \mathbf{R}$ ovat vakioita, $k = 1, \ldots, K$. Määrää kaikki markkinoiden tasapainotilat.

Sijoitustoiminnan matematiikka 12.6.2008

1. Markkinoilla on ostettavissa ja myytävissä hetkinä nolla ja yksi yhden ja kahden vuoden nollakuponkibondeja. Molempien vuosikorko hetkellä nolla on $i_0 > 0$ (deterministinen) ja hetkellä yksi I_1. Oletetaan, että $\mathbf{P}(I_1 > i_0) > 0$ ja $\mathbf{P}(I_1 < i_0) > 0$. Osoita, että rahaa ei voi tehdä riskittömästi nolla-alkuvarallisuudella sijoittamalla hetkellä nolla kyseisiin bondeihin ja realisoimalla ne hetkellä yksi.

2. Osoita, että kahden periodin markkinamalli on arbitraasivapaa, jos riskineutraali todennäköisyysmitta on olemassa.

3. Oletetaan, että markkinoilla on yksi riskitön ja joukko riskillisiä arvopapereita. Odotustuottoa $r \geq 1$ vastaava minimaalinen riskillisten arvopapereiden allokoinnin antaman tuottoasteen varianssi on

$$\sigma^2(r) = r^2 - 2r + 2.$$

Tarkastellaan salkkuja, joihin voi kuulua sekä riskillisiä että riskittömiä arvopapereita. Oletetaan, että odotustuottoa $r = 8$ vastaava minimaalinen CAP-mallin mukainen tuottoasteen varianssi on $\sigma^2 = 45$. Määrää odotustuottoa $r = 2$ vastaava minimaalinen varianssi.

4. Määrittele tasapainotila arvopaperimarkkinoilla. Osoita, että jos markkinoilla on bondi positiivisella vuosikorolla, niin kaikki budjettirajoitukset toteutuvat tasapainotilassa yhtälöinä.

5. Olkoot jälleenvakuutusmarkkinoiden toimijoiden utiliteettifunktiot u_k muotoa

$$u_k(z) = \alpha_k z + \beta_k, \quad z \in \mathbf{R},$$

missä $\alpha_k > 0$ ja $\beta_k \in \mathbf{R}$ ovat vakioita, $k = 1, \ldots, K$. Määrää kaikki markkinoiden Pareto-optimaaliset tilat.

Sijoitustoiminnan matematiikka 14.8.2008

1. Markkinoilla on vuoden nollakuponkibondi, osake ja tähän kytketty eurooppalainen osto-optio, joka oikeuttaa yhden osakkeen ostamiseen hintaan K hetkellä yksi. Bondin vuosikorko on $i > 0$, osakkeen hinta hetkellä nolla on 1 ja osakkeella on kaksi mahdollista arvoa α ja β hetkellä yksi, missä $0 < \alpha < 1+i < \beta$. Määrää sellaiset option parametrit (hetken nolla hinta ja K), että markkinat ovat arbitraasivapaat.

2. Osoita, että kahden periodin markkinamalli on arbitraasivapaa, jos riskineutraali todennäköisyysmitta on olemassa.

3. Olkoon markkinoilla N riskillistä arvopaperia. Odotustuottoa $r > r_0$ vastaava minimaalinen arvopapereiden yhdistelmän tuottoasteen varianssi on

$$\sigma^2(r) = a(r - r_0)^2 + \sigma_0^2,$$

missä a, r_0 ja σ_0 ovat positiivisia vakioita. Markkinoille kehitetään uusi arvopaperi $N + 1$, jonka odotustuotto on suurempi kuin r_0 ja tuottoaste riippumaton markkinoiden muiden arvopapereiden tuottoasteista. Osoita, että syntyneillä markkinoilla on mahdollista konstruoida allokointi, jonka tuottoasteen odotusarvo on annettu $r > r_0$ ja varianssi pienempi kuin $\sigma^2(r)$.

4. Markkinoilla on arvopaperit $1, \ldots, N$ ja näihin liittyvät hetken yksi arvot $S_1(1), \ldots, S_N(1)$. Oletetaan, että markkinat ovat täydelliset. Markkinoilla on K toimijaa. Utiliteettifunktiot määräytyvät ehdoista

$$u_k(z) = (1 - \gamma_k)^{-1}(z^{1-\gamma_k} - 1), \quad z > 0, \ k = 1, \ldots, K,$$

missä $1 > \gamma_1 \geq \ldots \geq \gamma_K > 0$ ovat vakioita. Osoita, että Pareto-optimaalisessa tilassa toimijan k salkku $\overline{\theta}^k$ määräytyy ehdosta

$$S(1)\overline{\theta}^k = h_k \left(S(1)\overline{\theta}^1\right)^{\beta_k},$$

missä $h_k > 0$ ja $\beta_k \geq 1$ ovat vakioita. Osoita, että Pareto-optimaalisia tiloja on olemassa, jos $\gamma_1 = \cdots = \gamma_K$.

5. Markkinoilla on N arvopaperia. Arvopaperi 1 on bondi ja muut ovat aidosti riskillisiä. Arvopaperin n hetken yksi arvo on $S_n(1)$ ja lukumäärä $L_n, \forall n$. Oletetaan, että $S_1(1) \equiv 1$. Markkinoilla on $K \geq 2$ toimijaa, joiden salkut alkutilanteessa ovat $\eta^k, k = 1, \ldots, K$. Toimijan 1 utiliteettifunktio määräytyy ehdosta $u_1(z) = az + b$, $z \in \mathbf{R}$, missä a ja b ovat positiivisia vakioita. Toimijan k utiliteettifunktio u_k on aidosti konkaavi, $k = 2, \ldots, K$. Osoita, että markkinoilla on sellainen tasapainotila, jossa toimijan k salkku muodostuu pelkästään bondeista, $\forall k \geq 2$.

Sijoitustoiminnan matematiikka 21.10.2008

1. Olkoon korkorakenne hetkellä nolla seuraava:

Eräpäivä	1/2	1	3/2	2
Vuosikorko	0.03	0.04	0.05	0.05.

Tarkastellaan hetkellä nolla tehtävää sopimusta, jossa henkilö sitoutuu tallettamaan hetkellä yksi pankkiin yhden euron vuodeksi. Mikä on hetkellä kaksi nostettavissa oleva määrä arbitraasivapailla markkinoilla stokastisessa korkoympäristössä, kun rahaa ei liiku hetkellä nolla. Perustelu?

2. Tarkastellaan markkinoita, joilla on kaksi arvopaperia. Toinen on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i \geq 0$ ja toinen osake, jonka hinta hetkellä nolla on p. Oletetaan, että markkinat ovat arbitraasivapaat. Lisätään arvopaperivalikoimaan sopimus, jonka haltija ostaa hetkellä yksi kaksi osaketta sovittuun yhteishintaan γ (osto toteutetaan aina). Määrää arvopaperin arbitraasivapaa hinta sopimuksen tekohetkellä nolla.

3. Oletetaan, että markkinoilla on yksi riskitön ja joukko riskillisiä arvopapereita. Odotustuottoa $r \geq 1$ vastaava minimaalinen riskillisten arvopapereiden allokoinnin antaman tuottoasteen varianssi on

$$\sigma^2(r) = r^2 - 2r + 2.$$

Olkoon markkinoiden riskitön korko $i = 1/2$.

a) Määrää Capital asset pricing -mallin mukaisen markkinasalkun odotustuotto ja varianssi.

b) Sijoittaja muodostaa salkun, jonka odotustuotto on 2. Määrää tätä vastaava minimaalinen tuottoasteen varianssi.

4. Markkinoilla on arvopaperit $1, \ldots, N$ ja näihin liittyvät hetken yksi arvot $S_1(1), \ldots, S_N(1)$. Markkinoilla on $K \geq 1$ identtistä toimijaa ts. alkuallokoinnit ja utiliteettifunktiot ovat samat kaikilla toimijoilla. Osoita, että markkinoilla on tasapainotila, kun yhteinen utiliteettifunktio oletetaan aidosti kasvavaksi ja konkaaviksi.

5. Osoita, että jälleenvakuutusmarkkinoiden tasapainotila on aina Pareto-optimaalinen tila.

Sijoitustoiminnan matematiikka 11.6.2009

1. Tarkastellaan markkinoita, joilla on neljä arvopaperia. Arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi vuosikorkona $i \geq 0$. Arvopaperi 2 on osake, jonka hinta on p ja arvopaperi 3 osake, jonka hinta on q. Arvopaperi 4 on vaihto-optio, jonka haltijalla on hetkellä yksi oikeus vaihtaa yksi omistamansa arvopaperi 2 yhteen kappaleeseen arvopaperia 3. Arvopaperin hinta on r.

Lisätään markkinoille vaihto-optio, jonka haltijalla on hetkellä yksi oikeus vaihtaa yksi omistamansa arvopaperi 3 yhteen kappaleeseen arvopaperia 2. Määrää arvopaperin kaikki arbitraasivapaat hinnat, kun alkuperäiset markkinat oletetaan arbitraasivapaiksi.

2. Tarkastellaan kahden periodin markkinoita, jonka arvopaperit ovat nollakuponkibondi (arvopaperi 1) ja osake (arvopaperi 2). Olkoot arvot hetkellä k $S_1(k)$ ja $S_2(k)$ vastaavasti, $k = 0, 1, 2$. Bondin vuosikorko on nolla molempina vuosina. Osakkeen hinta hetkellä nolla on 2, hetkellä yksi $2(1+\xi_1)$ ja hetkellä kaksi $2(1+\xi_1)(1+\xi_2)$, missä ξ_1 ja ξ_2 ovat riippumattomia satunnaismuuttujia. Lisäksi

$$\mathbb{P}(\xi_1 = -1/2) = \mathbb{P}(\xi_1 = 0) = \mathbb{P}(\xi_1 = 1/2) = 1/3 \text{ ja } \mathbb{P}(\xi_2 = -1/2) = 1/3, \mathbb{P}(\xi_2 = 1/2) = 2/3.$$

Määrää markkinoiden kaikki riskineutraalit todennäköisyysmitat sopivalla kuusialkioisella todennäköisyyskentällä.

3. Olkoot finanssimarkkinoiden toimijoiden utiliteettifunktiot u_k muotoa

$$u_k(z) = \alpha_k z + \beta_k, \quad z \in \mathbb{R},$$

missä $\alpha_k > 0$ ja $\beta_k \in \mathbb{R}$ ovat vakioita, $k = 1, \ldots, K$. Määrää kaikki markkinoiden Pareto-optimaaliset tilat.

4. Capital asset pricing -mallin mukaisilla finanssimarkkinoilla on nollakuponkibondi vuosikorolla $i \geq 0$ ja lisäksi joukko riskillisiä arvopapereita. Odotustuottoja 0.1 ja 0.2 vastaavat tuottoasteen minimaaliset varianssit ovat 1 ja 9. Sijoittajalla on erään operaation jälkeen hallussaan salkku, jonka odotustuotto on 0.13 ja tuottoasteen varianssi 4.

a) Määrää markkinoiden riskitön korko.

b) Mikä on mainitun sijoittajan maksimaalinen odotustuotto, kun tuottoasteen varianssi pidetään arvossa 4.

c) Mikä on mainitun sijoittajan minimaalinen tuottoasteen varianssi, kun odotustuotto pidetään arvossa 0.13.

5. Jälleenvakuutusmarkkinoilla yhtiön k utiliteettifunktio on u_k, alkupääoma U_k ja alkuperäinen kokonaisvahinkomäärä X_k, $k = 1, \ldots, K$. Olkoon $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ clearing-ehdon täyttävä allokointi ja $\bar{\omega}$ positiivinen satunnaismuuttuja. Oletetaan, että $\mathbb{E}(\bar{\omega}\bar{X}_k) = \mathbb{E}(\bar{\omega}X_k)$ ja

$$u_k'(U_k - \bar{X}_k) = \mathbb{E}(u_k'(U_k - \bar{X}_k))\bar{\omega}$$

kaikilla $k = 1, \ldots, K$. Osoita, että $(\bar{\omega}, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ on markkinoiden tasapainotila.