

Ryhmäteorian tentti 16.12.2008 klo 12-16

Vastaa neljään kysymykseen. Täydet pisteet saa perustelluista vastauksista. Jokainen tehtävä on kuuden pisteen arvoinen.

1. Milloin ryhmä on Abelin ryhmä? Osoita, että ryhmä, jonka kertaluku on joku alkuluku p , on Abelin ryhmä. Ovatko ryhmät $C_{13} \times C_{133}$ ja $C_{19} \times C_{91}$ isomorfisia?

2. Toimikoon ryhmä G joukossa Ω . Osoita, että G :n ratojen lukumäärä Ω :ssa on

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi(g)|,$$

missä $\chi(g) = \{\omega \in \Omega : \omega * g = \omega\}$. Laske kuinka monta tapaa on värittää tetraedrin särmät kahdella eri värillä (molempia ei ole pakko käyttää jokaisessa värityksessä).

3. Määrittele yksinkertainen ryhmä. Esitä Jordan-Hölderin lause ja todista se. Anna kompositiojonot kaikille ryhmille S_n , $n \geq 1$.
4. Määrittele, milloin ryhmä on ratkeava. Olkoon $N \triangleleft G$. Osoita, että G on ratkeava, jos ja vain jos N ja G/N ovat ratkeavia ryhmiä. Osoita, että D_{242} (242 alkion diedri ryhmä) on ratkeava.
5. Määrittele vapaa ryhmä. Osoita, että jokainen ryhmä G on vapaan ryhmän tekijäryhmä. Mitä ryhmiä ovat seuraavat

(i) $\langle a, c : ac = ca \rangle$

(ii) $\langle a, c : ac = ca, c^2 = 1, a^2 = c \rangle$

(iii) $\langle a, b : a^2 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$

Kuinka monta alkioita on ryhmässä $\langle a, b : a^2 = b^2 = 1 \rangle$?

6. Määrittele suora tulo ja puolisuora tulo. Listaa ryhmät, joiden kertaluku on 8. Mitkä näistä ovat suorita tuloja ja mitkä puolisuoria? Kuinka monta alkioita on ryhmässä $C_2 wr C_2$? Minkä tutumman ryhmän kanssa se on isomorfinen?
7. Jos kirjoitit kirjoitat esseen tätä kurssia varten, kirjoita lyhyt yhteenveto esseestäsi. Esitä päätulokset ja se, miten ne liittyvät kurssilla esitettyyn materiaaliin.