

Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon  
 Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
 Erilliskoe 12.6.2008

1. Määrittele Rubikin kuution asentojen ryhmä. Osoita, että se on Rubikin ryhmän normaali aliryhmä, ja määrittele sen avulla Rubikin paikkojen ryhmä.
2. Merkitään Rubikin kuution nurkkapaloja kirjaimilla  $N1, N2, \dots, N8$  ja särmäpaloja kirjaimilla  $S1, S2, \dots, S12$ . Onko seuraava palojen asema mahdollinen, ts. kuuluuko asema Rubikin paikkaryhmään:

$$(N1\ N5\ N2)(N3\ N7)(N4\ N8)(S3\ S4\ S8\ S10\ S11)(S1\ S12).$$

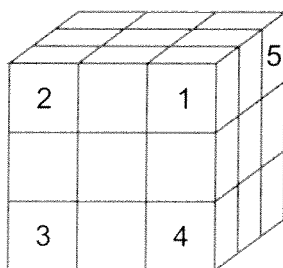
Perustele hyvin.

3. Tarkastellaan 12 alkion syklistä jäännösluokkaryhmää  $\mathbb{Z}_{12} = \{[0], [1], \dots, [11]\}$ , missä  $[m] = [n]$  joss erotus  $m - n$  on jaollinen 12:lla.

Osoita, että  $\mathbb{Z}_{12}$  on eräiden epätriviaalien aliryhmiensä suora summa (eli  $\mathbb{Z}_{12} = H \oplus K$  joillain  $H, K \leq \mathbb{Z}_{12}$ , missä  $H \neq \{[0]\} \neq K$ ).

4. Oletetaan, että oheisessa kuvassa kuutio on perusasemassa (sininen tahko on ylöspäin ja keltainen katsojaan päin), niin että luennolla opittu nurkkapalojen 3-sykli on kuvan merkintöjen mukaan (123). Anna siirtosarja, jolla voidaan tuottaa 3-sykli (245).

Voit kirjoittaa siirtosarjan joko opitun 3-syklin ja sen konjugaattien avulla tai sitten yhtenä kommutaattorina. Jos esität molemmat ratkaisut, saat kaksi lisäpistettä. (Opitun 3-syklin siirtoja ei tarvitse muistaa ulkoa, vaan sitä voi käyttää sellaisenaan.)



5. Ryhmän  $G$  kaikkien kommutaattorien virittämää aliryhmää kutsutaan *kommutaattorialiryhmäksi* ja merkitään  $G'$ . Ryhmä  $G'$  on siis kaikkien niiden alkoiden muodostama ryhmä, jotka saadaan äärellisinä tuloina ryhmän  $G$  kommutaattoreista.

Osoita, että jos  $G$  on ryhmä, niin  $G'$  on normaali  $G$ :ssä, ja tekijäryhmä  $G/G'$  on vaihdannainen.