Riskiteoria 9.8.2007

1. Yhtiön vakuutuskannassa on N vakuutettua, joiden vuotuiset vahinkojen lukumäärät ovat keskenään riippumattomia Poisson-jakautuneita satunnaismuuttujia. Poisson-parametri on λ_1 $100p$ prosentilla vakuutetuista ja λ_2 lopuilla ($Np \in \mathbf{N}, 0 < p < 1,\ \lambda_1, \lambda_2 > 0$).

a) Määrää yhtiön vuotuisen vahinkojen lukumäärän jakauma.

b) Osoita, että vakuutuskannasta umpimähkään poimitun vakuutetun vuotuinen vahinkojen lukumäärä noudattaa painotettua Poisson-jakaumaa. Mikä on struktuurimuuttujan jakauma.

2. Olkoon yhtiön vuotuisen kokonaisvahinkomäärän X odotusarvo μ ja varianssi σ^2. Olkoon edelleen vuotuinen vakuutusmaksu P ja alkupääoma U_0. Yhtiön sallitaan jatkaa toimintaansa, jos vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä on korkeintaan 0.01. Yhtiö ottaa osamääräjälleenvakuutuksen, jossa yhtiön omalle vastuulle jäävä osa vahingoista on rX $(0 \leq r \leq 1)$. Miten suuri r korkeintaan saa olla, että yhtiö täyttäisi edellä mainitun vaatimuksen omalle vastuulle jäävän liikkeen osalta, kun jälleenvakuutusmaksu on $(1-r)P$, $\mu = 200$, $\sigma = 20$, $P = 1.05\mu$ ja $U_0 = 30$. Tehtävässä voidaan soveltaa normaaliapproksimaatiota X:n jakaumaan. ($\phi(0.99) = 2.33$).

3. Yhtiön vakuutuskanta muodostuu kahdesta vakuutuslajista. Lajien vuotuiset kokonaisvahinkomäärät ovat toisistaan riippumattomia yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia. Poisson-parametrit ovat 2.3 ja 2.7. Yksittäisen vahingon suuruuden jakauma on molemmissa lajeissa eksponenttijakauma parametrilla $\mu = 1$. Tuota simuloimalla yksi havainto yhtiön vuotuisesta kokonaisvahinkomäärästä allaolevien satunnaislukujen avulla.

T(0,1)-jakautuneita satunnaislukuja:

0.425, 0.551, 0.388, 0.500, 0.441, 0.611, 0.490, 0.620, 0.552, 0.392, 0.701, 0.521, 0.590, 0.641

4. Olkoon yhtiön vuosien $1, 2, \ldots$ tappiot riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Olkoon c vuotuisen tappion kumulantit generoiva funktio ja T vararikkohetki. Yhtiöllä on vuoden 1 alussa alkupääomaa määrä $U_0 > 0$. Oletetaan, että $c(R) \in (-\infty, 0)$ ja että $c(t) = \infty, \forall t > R$, missä R on positiivinen. Osoita, että $\mathbf{P}(T < \infty) \leq e^{-RU_0}$.

5. Olkoot X_1 ja X_2 kokonaisvahinkomääriä. Oletetaan, että

$$\mathbf{P}(X_1 > x) \geq \mathbf{P}(X_2 > x)$$

kaikilla $x \geq 0$. Olkoon ρ_1 X_1:n ja ρ_2 X_2:n alkuvarallisuutta A_0 vastaava vakuutusyhtiön nollahyötyinen vakuutusmaksu. Osoita, että $\rho_1 \geq \rho_2$. Vakuutusyhtiön utiliteettifunktio oletetaan aidosti kasvavaksi.

Riskiteoria 19.12.2007

1. Määrittele painotettu Poisson-muuttuja ja johda momentit generoivalle funktiolle esitys struktuurimuuttujan momentit generoivan funktion ja vahinkojen lukumäärän odotusarvon avulla.

2. Oletetaan, että yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X noudattaa yhdistettyä Poisson-jakaumaa. Olkoon Poisson-parametri λ ja olkoon yksittäisen vahingon suuruudella eksponenttijakauma odotusarvona μ. Yhtiöllä on vuoden alussa alkupääoma U_0 ja vuotuinen vakuutusmaksu on $P = (1+v)\mathbf{E}(X)$, missä v on varmuuslisä. Tarkastellaan X:n jakaumaa normaaliapproksimaation tarkkuudella. Olkoon $\varepsilon = 0.01$. Standardi normaalijakauman kertymäfunktiolle ϕ pätee $\phi(0.99) = 2.33$.

a) Olkoon $U_0 = 30$, $\lambda = 200$ ja $\mu = 1$. Miten suuri on varmuuslisän oltava, että vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä olisi tason ε alapuolella.

b) Miten suuri on varmuuslisän oltava, että vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä olisi tason ε alapuolella ilman alkupääomaa.

3. Olkoon yhtiön kokonaisvahinkomäärä yhdistetty muuttuja. Olkoon vahinkojen lukumäärän odotusarvo μ_K ja varianssi σ_K^2. Oletetaan, että molemmat ovat äärellisiä. Yhtiö on suojautunut koko vakuutuskantaa koskevalla XL-jälleenvakuutuksella omavastuurajana M. Olkoon $p = \mathbf{P}(Z > M)$, missä Z edustaa yksittäisen vahingon suuruutta. Oletetaan, että $p \in (0,1)$. Olkoon $\overline{K}$ jälleenvakuuttajan nollaa suurempien vahinkojen lukumäärä. Osoita, että

$$\mathbf{Var}(\overline{K}) = p(1-p)\mu_K + p^2\sigma_K^2.$$

Vihje: $\mathrm{Bin}(n,p)$-jakauman odotusarvo ja varianssi ovat np ja $np(1-p)$.

4. Vahinkoja sattuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetifunktiolla $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$, missä

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_1, \text{ kun } t \in [k, k+1/2), k = 0,1,2,\ldots \\ \lambda_2, \text{ kun } t \in [k+1/2, k+1), k = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

ja λ_1 ja λ_2 ovat positiivisia vakioita. Raportoitumisviiveet ovat toisistaan ja lukumääräprosessista riippumattomia välille $(0,1)$ tasan jakautuneita satunnaismuuttujia. Yksittäisen vahingon suuruus on vakio (=1) ja korvaus maksetaan aina kokonaisuudessaan heti, kun vahinko raportoituu yhtiöön. Määrää korvausvastuun odotusarvo hetkinä $n/2$, $n = 2,3,\ldots$, kun yhtiö on aloittanut toimintansa hetkellä nolla.

5. Yhtiön i vuosien $1,2,\ldots$ tappiot ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, $i = 1,2$. Olkoo c_i yhtiön i vuotuisen tappion kumulantit generoiva funktio ja R_i Lundbergin eksponentti. Oletetaan, että c_i on äärellinen kaikkialla ja että $R_i \in (0,\infty)$, $i = 1,2$. Olkoon T_i yhtiön i vararikkohetki ja olkoon kummankin yhtiön alkupääoma U_0. Osoita, että jos $R_2 > R_1$, niin $\mathbf{P}(T_2 < \infty) < \mathbf{P}(T_1 < \infty)$, kunhan U_0 on riittävän suuri.

Riskiteoria 24.1.2008

1. Määrittele painotettu Poisson-muuttuja ja johda varianssille esitys struktuurimuuttujan ja vahinkojen lukumäärän odotusarvon avulla.

2. Olkoon yhtiön i $(i = 1, 2)$ vuotuisen kokonaisvahinkomäärän odotusarvo μ_i ja hajonta $\sigma_i > 0$. Yhtiön i vuotuinen vakuutusmaksu P_i olkoon deterministinen ja alkupääoma vuoden 1 alussa $U_i > 0$. Oletetaan, että kummankin yhtiön vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä on $\leq \varepsilon$, missä $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Tarkastellaan tilannetta, jossa yhtiöt fuusioidaan vuoden 1 alussa. Oletetaan, että yhtiöiden kokonaisvahinkomäärät ovat toisistaan riippumattomia. Todista, että fuusiossa syntyvän yhtiön vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä on pienempi kuin ε. Kokonaisvahinkomääriin voidaan soveltaa tehtävässä normaaliapproksimaatiota.

3. Olkoon yhtiön kokonaisvahinkomäärä yhdistetty muuttuja. Olkoon vahinkojen lukumäärän momentit generoiva funktio M. Yhtiö on suojautunut koko vakuutuskantaa koskevalla XL-jälleenvakuutuksella omavastuurajana A. Olkoon $p = \mathbf{P}(Z > A)$, missä Z edustaa yksittäisen vahingon suuruutta. Oletetaan, että $p \in (0, 1)$. Olkoon $\overline{K}$ jälleenvakuuttajan nollaa suurempien vahinkojen lukumäärä. Osoita, että $\overline{K}$:n momentit generoiva funktio $\overline{M}$ määräytyy ehdosta

$$\overline{M}(s) = M\left(\log(1 - p + pe^s)\right) \text{ }, \forall s \in \mathbf{R}.$$

4. Vahinkoja sattuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetifunktiolla $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$, missä

$$\lambda(t) = \lambda(1 + g)^t,$$

ja λ ja g ovat positiivisia vakioita. Oletetaan, että vahinkojen raportoitumisviiveet ovat toisistaan ja lukumääräprosessista riippumattomia välille $(0, 3)$ tasan jakautuneita satunnaismuuttujia. Yksittäisen vahingon suuruus on vakio (=1) ja korvaus maksetaan aina kokonaisuudessaan heti, kun vahinko raportoituu yhtiöön. Määrää korvausvastuun odotusarvo hetkellä yksi, kun yhtiö on aloittanut toimintansa hetkellä nolla.

5. Yhtiön i vuosien $1, 2, \ldots$ tappiot $V_1(i), V_2(i), \ldots$ ovat riippumattomia $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ −jakautuneita satunnaismuuttujia, missä $\mu_i < 0$ ja $\sigma_i^2 \in (0, \infty)$ ovat $V_1(i)$:n odotusarvo ja varianssi $(i = 1, 2)$. Oletetaan, että vuotuisen tappion suhteellinen hajonta σ_i/μ_i on sama kummallakin yhtiöllä ja että $\sigma_2 > \sigma_1$. Olkoon kummankin yhtiön alkupääoma U_0 ja T_i yhtiön i vararikkohetki. Osoita, että $\mathbf{P}(T_1 < \infty) < \mathbf{P}(T_2 < \infty)$, kunhan U_0 on riittävän suuri.

Vihje: $N(\mu, \sigma^2)$ −jakautuneen satunnaismuuttujan kumulantit generoiva funktio on

$$s \to \mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}.$$

Riskiteoria 4.3.2008

1. Osoita, että kahden riippumattoman painotettua Poisson-jakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan summa noudattaa painotettua Poisson-jakaumaa.

2. Oletetaan, että yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X noudattaa yhdistettyä Poisson-jakaumaa. Olkoon Poisson-parametri $\lambda > 0$ ja yksittäisen vahingon suuruudella eksponenttijakauma parametrina μ. Yhtiöllä on vuoden alussa alkupääoma U_0 ja vuotuinen vakuutusmaksu on P. Tarkastellaan X:n jakaumaa normaaliapproksimaation tarkkuudella. Olkoon $\mu = 1, \lambda = 100$ ja $\varepsilon = 0.01$. Standardin normaalijakauman kertymäfunktiolle ϕ pätee $\phi(0.99) = 2.33$.

a) Olkoon $P = 110$. Miten suuri on alkupääoman oltava, että vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä olisi tason ε alapuolella.

b) Olkoon $U_0 = 30$. Miten suuri on vakuutusmaksun oltava, että vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä olisi tason ε alapuolella.

3. Yhtiön yksittäisen vahingon suuruuden Z kertymäfunktio on S. Yhtiöllä on osamääräjälleenvakuutus siten, että jälleenvakuuttaja maksaa osan $(1-r)Z$ jokaisesta vahingosta, $r \in (0,1)$. Jäljelle jäävälle osalle yhtiöllä on XL-jälleenvakuutussuoja omavastuurajana M. Määrää yhtiön omalla vastuulla olevan yksittäisen vahingon suuruuden kertymäfunktio.

4. Vahinkoja sattuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetifunktiolla $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$, missä

$$\lambda(t) = \lambda(1+g)^t,$$

ja λ ja g ovat positiivisia vakioita. Oletetaan, että vahinkojen raportoitumisviiveet ovat toisistaan ja lukumääräprosessista riippumattomia välille $(0,1)$ tasan jakautuneita satunnaismuuttujia. Yksittäisen vahingon suuruus on vakio $(=1)$ ja korvaus maksetaan aina kokonaisuudessaan heti, kun vahinko raportoituu yhtiöön. Määrää korvausvastuun jakauma hetkellä yksi, kun yhtiö on aloittanut toimintansa hetkellä nolla. Arvioi normaaliapproksimaation avulla todennäköisyyttä, että korvausvastuu on suurempi kuin 70, kun $\lambda = 100$ ja $g = 0.1$.

5. Olkoon yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja siten, että vahinkojen lukumäärän odotusarvo on λ ja yksittäiset vahingot ovat eksponenttijakautuneita parametrilla μ. Oletetaan, että eri vuosien kokonaisvahinkomäärät ovat toisistaan riippumattomia. Vuoden n vakuutusmaksu olkoon $(1+v)\lambda/\mu$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Olkoon T vararikkohetki. Osoita, että $\mathbf{P}(T < \infty) \leq 0.01$ riippumatta Poisson-parametrista, kun $\mu = 1$, $v = 0.05$ ja yhtiöllä on vuoden 1 alussa alkupääomaa määrä 100.

Riskiteoria 12.6.2008

1. Oletetaan, että yhtiön vuotuinen vahinkojen lukumäärä noudattaa painotettua Poisson-jakaumaa parametrilla (λ, Q). Olkoon $\mathbf{P}(Q = 1/2) = \mathbf{P}(Q = 3/2) = 1/2$. Vahingot ovat kaikki yhden euron suuruisia ja vuotuinen kokonaisvakuutusmaksu on P. Olkoon X yhden vuoden kokonaisvahinkomäärä. Miten suuri vakuutusmaksun P on vähintään oltava, että pätisi

$$\mathbf{P}(X > P) \leq p.$$

Parametreilla on arvot $\lambda = 2$ ja $p = 0.1$.

2. Olkoon yhtiön vuotuisen kokonaisvahinkomäärän X odotusarvo μ ja varianssi σ^2. Olkoon edelleen vuotuinen vakuutusmaksu P ja alkupääoma U_0. Yhtiön sallitaan jatkaa toimintaansa, jos vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä on korkeintaan 0.01. Yhtiö ottaa osamääräjälleenvakuutuksen, jossa yhtiön omalle vastuulle jäävä osa vahingoista on rX $(0 \leq r \leq 1)$. Miten suuri r korkeintaan saa olla, että yhtiö täyttäisi edellä mainitun vaatimuksen omalle vastuulle jäävän liikkeen osalta, kun jälleenvakuutusmaksu on $(1-r)P$, $\mu = 200$, $\sigma = 20$, $P = 1.05\mu$ ja $U_0 = 30$. Tehtävässä voidaan soveltaa normaaliapproksimaatiota X:n jakaumaan. ($\phi(0.99) = 2.33$).

3. Olkoon

$X_n =$ yhtiön vakuutuskannassa vuonna n sattuneiden vahinkojen kokonaisvahinkomäärä,

$M_n =$ yhtiön vuonna n maksamat korvaukset,

$U_n =$ yhtiön korvausvastuu vuoden n lopussa.

Osoita, että $X_n = M_n + U_n - U_{n-1}$.

4. Olkoon yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja siten, että vahinkojen lukumäärän odotusarvo on λ ja yksittäisen vahingon suuruus on vakio a. Oletetaan, että eri vuosien kokonaisvahinkomäärät ovat toisistaan riippumattomia. Vuotuinen vakuutusmaksu olkoon P. Yhtiöllä on vuoden 1 alussa käytettävissään alkupääoma U_0. Olkoon T vararikkohetki. Osoita, että yhtiö täyttää vakavaraisuusvaatimuksen

$$\mathbf{P}(T \leq 10) \leq 0.01,$$

kun parametreilla on arvot $\lambda = 100$, $a = 1$, $P = 110$ ja $U_0 = 100$.

5. Olkoon (potentiaalisen) vakuutetun utiliteettifunktio u muotoa $u(v) = \log v$, $v > 0$. Olkoon kokonaisvahinkomäärällä X jakauma $\mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(X = 20) = 1/2$. Vakuutetun alkuvarallisuus olkoon $a_0 > 20$. Vakuutusyhtiö myy kyseistä kokonaisvahinkomäärää vastaavaa vakuutusta hintaan $P = 15$. Miten suuri alkuvarallisuus a_0 voi korkeintaan olla, että vakuutettu olisi halukas ostamaan vakuutuksen.

Riskiteoria 14.8.2008

1. Olkoon X_i yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja, $i = 1, 2$. Yksittäisen vahingon suuruusjakauma on sama kummallakin muuttujalla. Oletetaan, että X_1 ja X_2 ovat riippumattomia. Osoita, että $X_1 + X_2$ noudattaa yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa.

2. Olkoon Z Pareto-jakautunut parametreina α ja M ts. tiheysfunktio on $g(z) = \alpha z^{-\alpha-1}/M^{-\alpha}$ alueessa $z > M$, missä $\alpha > 0$ ja $M > 0$ ovat vakioita. Oletetaan, että käytettävissä on haluttu määrä riippumattomia T(0,1)-jakautuneita satunnaismuuttujia $R_1, R_2, \ldots$. Esitä menettely, jonka avulla voidaan tuottaa riippumattomia havaintoja a) Z:n jakaumasta, b) muuttujan $\min\{Z, M'\}$ jakaumasta ($M' > M$).

3. Olkoon yhtiön i kokonaisvahinkomäärän X_i varianssi $\sigma^2_{X_i} \in (0, \infty), i = 1, 2$. Oletetaan, että X_1 ja X_2 ovat riippumattomia. Osoita, että on olemassa sellainen yhtiöiden välinen riskinvaihto, että yhtiön i vastuulle jäävän kokonaisvahinkomäärän Y_i varianssille $\sigma^2_{Y_i}$ pätee $\sigma^2_{Y_i} < \sigma^2_{X_i}, i = 1, 2$. Oletetaan lisäksi, että X_i noudattaa yhdistettyä Poisson-jakaumaa parametrilla (λ_i, S). Yhtiöiden vahinkojen lukumäärät ovat toisistaan riippumattomia, samoin vahinkojen suuruudet. Todista, että on olemassa edellä esitetyn mukainen riskinvaihto siten, että lisäksi $\mathbf{E}(Y_i) = \mathbf{E}(X_i), i = 1, 2$.

4. Vahinkoja sattuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ ja yksittäisen vahingon suuruus on vakio (=1). Vahinkojen raportoitumisviiveet ovat toisistaan ja lukumääräprosessista riippumattomia ja keskenään samoin jakautuneita. Olkoon yhteinen kertymäfunktio G. Korvaus maksetaan aina kokonaisuudessaan heti, kun vahinko raportoituu yhtiöön. Olkoon raportoitumisviiveen odotusarvo $\rho \in (0, \infty)$ ja U_n korvausvastuu hetkellä n. Osoita, että

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}(U_n) = \lambda \rho.$$

5. Olkoon vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja. Vahinkojen lukumäärän odotusarvo on λ ja yksittäisen vahingon suuruus vakio a. Oletetaan, että eri vuosien kokonaisvahinkomäärät ovat toisistaan riippumattomia. Vuotuinen vakuutusmaksu olkoon P. Yhtiöllä on vuoden 1 alussa alkupääoma U_0. Olkoon T vararikkohetki. Yhtiön sallitaan jatkaa toimintaansa, mikäli $\mathbf{P}(T \le 3) \le 0.01$. Osoita, että yhtiö täyttää mainitun vakavaraisuusvaatimuksen, kun parametreilla on arvot $\lambda = 10$, $a = 2$, $P = 23$ ja $U_0 = 30$.

Riskiteoria 17.12.2008

1. Oletetaan, että kokonaisvahinkomäärä X noudattaa yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa. Määrää X:n momentit generoiva funktio yksittäisen vahingon suuruuden ja struktuurimuuttujan momentit generoivien funktioiden sekä vahinkojen lukumäärän odotusarvon avulla.

2. Olkoot F ja G kertymäfunktioita. Oletetaan, että F on jatkuva ja aidosti kasvava koko $\mathbf{R}$:ssä. Oletetaan, että käytettävissä on jono riippumattomia F-jakautuneita satunnaismuuttujia $R_1, R_2, \ldots$. Esitä menettely, jonka avulla saadaan riippumattomia G-jakautuneita satunnaismuuttujia.

3. Olkoon yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja, vuotuinen vakuutusmaksu $P = 1.1\mathbf{E}(X)$ ja alkupääoma U_0. Olkoon Poisson-parametri λ ja yksittäisen vahingon suuruus eksponenttijakautunut parametrina μ. Yhtiön sallitaan jatkaa toimintaansa, jos vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä on korkeintaan 0.01. Osoita, että yhtiö ei täytä mainittua vakavaraisuusvaatimusta.

Yhtiö muuttaa vakuutusopimuksensa siten, että vakuutetuille tulee M euron omavastuu. Toisin sanoen yhtiö korvaa vain rajan M ylittävän osan kustakin vahingosta. Olkoon X_M näin syntyvä kokonaisvahinkomäärä ja vakuutusmaksu $P_M = 1.1\mathbf{E}(X_M)$. Osoita, että yhtiö täyttää muutoksen jälkeen mainitun vakavaraisuusvaatimuksen.

Parametreilla on arvot $U_0 = 20$, $\lambda = 200$, $\mu = 1$ ja $M = 2$. Tehtävässä voidaan soveltaa normaaliapproksimaatiota kokonaisvahinkomäärien jakaumiin. ($\phi(0.99) = 2.33$).

4. Olkoon yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja siten, että vahinkojen lukumäärän odotusarvo on λ ja yksittäisen vahingon suuruus on vakio a. Oletetaan, että eri vuosien kokonaisvahinkomäärät ovat toisistaan riippumattomia. Vuotuinen vakuutusmaksu olkoon P. Yhtiöllä on vuoden 1 alussa käytettävissään alkupääoma U_0. Olkoon T vararikkohetki. Osoita, että yhtiö täyttää vakavaraisuusvaatimuksen

$$\mathbf{P}(T \leq 10) \leq 0.01,$$

kun parametreilla on arvot $\lambda = 100$, $a = 1$, $P = 110$ ja $U_0 = 100$.

5. Esitä utiliteettiteorian valossa perustelut sille, että vakuutussopimuksen tekeminen [illegible] on [illegible] sekä vakuutetun että vakuutusyhtiön näkökulmasta rationaalista.

Riskiteoria 3.3.2009

1. Olkoot K_1 ja K_2 lukumäärämuuttujia ja Q ei-negatiivinen satunnaismuuttuja. Olkoon $\mathbb{E}(Q) = 1$ ja $H(q) = \mathbb{P}(Q \le q)$ kaikilla $q \in \mathbb{R}$. Oletetaan. että

$$\mathbb{P}(K_1 = k_1. K_2 = k_2) = \int_0^\infty e^{-\lambda_1 q}\frac{(\lambda_1 q)^{k_1}}{k!}e^{-\lambda_2 q}\frac{(\lambda_2 q)^{k_2}}{k!}\,dH(q). \qquad k_1. k_2 = 0. 1. 2. \dots.$$

missä λ_1 ja λ_2 ovat positiivisia vakioita. Osoita. että K_1 ja $K_1 + K_2$ noudattavat painotettua Poisson-jakaumaa.

2. Oletetaan. että kokonaisvahinkomäärä X noudattaa yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa. Vahinkojen lukumäärän odotusarvo olkoon $\lambda = 2$ ja struktuurimuuttujan q jakauma $\mathbf{P}(q = 0.9) = \mathbf{P}(q = 1.1) = 0.5$. Tuota simuloimalla yksi havainto X:n jakaumasta allaolevien satunnaislukujen avulla. kun yksittäiset vahingot ovat eksponenttijakautuneita parametrilla $\mu = 1$ (tiheysfunktio e^{-z} alueessa $z > 0$).

T(0.1)-jakautuneita satunnaislukuja:

0.425. 0.551. 0.388. 0.500. 0.441. 0.611. 0.490. 0.620. 0.552. 0.392. 0.701. 0.521. 0.590. 0.641

3. Olkoon yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja. vuotuinen vakuutusmaksu $P = 1.1\mathbf{E}(X)$ ja alkupääoma U_0. Olkoon Poisson-parametri λ ja yksittäisen vahingon suuruus eksponenttijakautunut parametrina μ. Yhtiön sallitaan jatkaa toimintaansa. jos vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä on korkeintaan 0.01. Osoita. että yhtiö ei täytä mainittua vakavaraisuusvaatimusta.

Yhtiö muuttaa vakuutusopimuksensa siten. että vakuutetuille tulee M euron omavastuu. Toisin sanoen yhtiö korvaa vain rajan M ylittävän osan kustakin vahingosta. Olkoon X_M näin syntyvä kokonaisvahinkomäärä ja vakuutusmaksu $P_M = 1.1\mathbf{E}(X_M)$. Osoita. että yhtiö täyttää muutoksen jälkeen mainitun vakavaraisuusvaatimuksen. Parametreilla on arvot $U_0 = 20$. $\lambda = 200$. $\mu = 1$ ja $M = 2$. Tehtävässä voidaan soveltaa normaaliapproksimaatiota kokonaisvahinkomäärien jakaumiin. ($\phi(0.99) = 2.33$).

4. Vahinkoja sattuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteettifunktiolla $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$. missä

$$\lambda(t) = \lambda(1+g)^t.$$

ja $\lambda = 100$ ja $g = 0.1$. Oletetaan. että vahinkojen raportoitumisviiveet ovat toisistaan ja lukumääräprosessista riippumattomia välille (0.1) tasan jakautuneita satunnaismuuttujia. Yksittäisen vahingon suuruus on vakio (=1) ja korvaus maksetaan aina kokonaisuudessaan heti. kun vahinko raportoituu yhtiöön. Määrää korvausvastuun jakauma hetkellä yksi. kun yhtiö on aloittanut toimintansa hetkellä nolla. Arvioi normaaliapproksimaation avulla todennäköisyyttä. että korvausvastuu on suurempi kuin 70.

5. Yhtiön vuosien 1.2... tappiot $V_1. V_2. \dots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Olkoon muuttujan V_1 kumulantit generoiva funktio c äärellinen koko reaaliakselilla. Oletetaan. että yhtälöllä $c(t) = 0$ on yksikäsitteinen positiivinen juuri R. Olkoon $t \in (R. \infty)$ kiinteä ja $x = 1/c'(t)$. Yhtiöllä on vuoden 1 alussa käytettävissään alkupääoma $U_0 > 0$. Olkoon T vararikkohetki. Todista. että

$$\mathbf{P}(T \le xU_0) < e^{-(t - xc(t))U_0}.$$