Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Riemannin geometria
Loppukoe
9.8.2007

1. Olkoon (U, x), $x = (x^1, \ldots, x^n)$, kartta ja olkoon $\partial_1, \ldots, \partial_n$ sitä vastaava koordinaattikehys. Osoita, että kaava
$$\nabla_X Y = \big(a^i b^j \Gamma^k_{ij} + X b^k\big)\partial_k,$$
missä $X = a^i\partial_i \in \mathcal{T}(U)$ ja $Y = b^i\partial_i \in \mathcal{T}(U)$, määrittelee affiinin konnektion U:ssa.

2. Olkoon M Riemannin monisto, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Riemannin metriikka ja ∇ Riemannin konnektio. Reaaliarvoisen funktion $f \in C^\infty(M)$ Hessian on 2-kovariantti tensorikenttä $\operatorname{Hess} f \in \mathcal{T}^2(M)$,
$$\operatorname{Hess} f(X,Y) = \langle \nabla_X(\nabla f), Y\rangle, \quad X, Y \in \mathcal{T}(M).$$
Osoita, että $\operatorname{Hess} f$ on symmetrinen ja että
$$\operatorname{Hess} f(X,Y) = X(Yf) - (\nabla_X Y)f.$$

3. Olkoot M ja N yhtenäisiä Riemannin monistoja ja $f\colon M \to N$ diffeomorfismi. Oletetaan, että N on täydellinen ja että on olemassa sellainen vakio $c > 0$, että
$$|v| \geq c|f_{*p}v|$$
kaikilla $p \in M$ ja kaikilla $v \in T_pM$. Osoita, että M on täydellinen.

4. Olkoon M täydellinen Riemannin monisto siten, että $K(\sigma) \leq 0$ jokaisella 2-ulotteisella aliavaruudella $\sigma \subset T_pM$ ja kaikilla $p \in M$. Osoita, että $\exp_p : T_pM \to M$ on lokaali diffeomorfismi kaikilla $p \in M$.

5. Olkoon M yhtenäinen, täydellinen Riemannin n-monisto. Oletetaan, että on olemassa vakio $H > 0$ siten, että $\operatorname{Ric}(v) \geq (n-1)H$ kaikilla yksikkövektoreilla $v \in TM$, $|v| = 1$. Osoita, että
$$\operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Riemannin geometria
Loppukoe
14.11.2007

1. Olkoon M Riemannin monisto varustettuna Riemannin metriikalla $g = \langle\, ,\, \rangle$. Määrittele ensin ns. affiini konnektio ja sitten Riemannin konnektio.

2. Olkoon $\gamma\colon I \to M$ C^∞-polku. Kun $t_0, t \in I$, niin määritellään kuvaus (lineaarinen isomorfismi) $P_{t_0,t}\colon T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t)}M$ asettamalla $P_{t_0,t}v = V(t)$, missä $V \in \mathcal{T}(\gamma)$ on vektorin $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ yhdensuuntaissiirto pitkin γ:aa (engl. parallel transport of $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ along γ). Osoita, että

$$D_tW(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{P_{t_0,t}^{-1}W(t) - W(t_0)}{t - t_0}$$

kun $W \in \mathcal{T}(\gamma)$. [Ohje: Käytä yhdensuuntaista kehystä (parallel frame) pitkin γ:aa.]

3. Olkoon $p \in M$. Osoita, että on olemassa p:n ympäristö $U \subset M$ ja nollavektorin ympäristö $\mathcal{V} \subset T_pM$ s.e. $\exp_p\colon \mathcal{V} \to U$ on diffeomorfismi.

4. Olkoon $\sigma \subset T_pM$ 2-ulotteinen aliavaruus ja $u, v \in \sigma$ lineaarisesti riippumattomia. Osoita, että leikkauskaarevuus

$$K(u,v) = \frac{\langle R(u,v)v, u\rangle}{|u|^2|v|^2 - \langle u, v\rangle^2}$$

ei riipu vektoreiden $u \in \sigma$ ja $v \in \sigma$ valinnasta.

5. Olkoon M yhtenäinen, täydellinen Riemannin n-monisto. Oletetaan, että on olemassa vakio $H > 0$ siten, että $\mathrm{Ric}(v) \geq (n-1)H$ kaikilla yksikkövektoreilla $v \in TM$, $|v| = 1$. Osoita, että

$$\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}\,.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Riemannin geometria
Loppukoe
3.4.2008

1. Olkoon (U, x), $x = (x^1, \ldots, x^n)$, kartta ja olkoon $\partial_1, \ldots, \partial_n$ sitä vastaava koordinaattikehys. Osoita, että kaava

$$\nabla_X Y = \left(a^i b^j \Gamma_{ij}^k + X b^k\right)\partial_k,$$

missä $X = a^i\partial_i \in \mathcal{T}(U)$ ja $Y = b^i\partial_i \in \mathcal{T}(U)$, määrittelee affiinin konnektion U:ssa.

2. Olkoon M Riemannin monisto, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Riemannin metriikka ja ∇ Riemannin konnektio. Reaaliarvoisen funktion $f \in C^\infty(M)$ Hessian on 2-kovariantti tensorikenttä $\operatorname{Hess} f \in \mathcal{T}^2(M)$,

$$\operatorname{Hess} f(X, Y) = \langle \nabla_X(\nabla f), Y\rangle, \quad X, Y \in \mathcal{T}(M).$$

Osoita, että $\operatorname{Hess} f$ on symmetrinen ja että

$$\operatorname{Hess} f(X, Y) = X(Yf) - (\nabla_X Y)f.$$

3. Olkoot M ja N yhtenäisiä Riemannin monistoja ja $f\colon M \to N$ diffeomorfismi. Oletetaan, että N on täydellinen ja että on olemassa sellainen vakio $c > 0$, että

$$|v| \geq c|f_{*p}v|$$

kaikilla $p \in M$ ja kaikilla $v \in T_pM$. Osoita, että M on täydellinen.

4. Olkoon M täydellinen Riemannin monisto siten, että $K(\sigma) \leq 0$ jokaisella 2-ulotteisella aliavaruudella $\sigma \subset T_pM$ ja kaikilla $p \in M$. Osoita, että $\exp_p : T_pM \to M$ on lokaali diffeomorfismi kaikilla $p \in M$.

5. Olkoon M yhtenäinen, täydellinen Riemannin n-monisto. Oletetaan, että on olemassa vakio $H > 0$ siten, että $\operatorname{Ric}(v) \geq (n-1)H$ kaikilla yksikkövektoreilla $v \in TM$, $|v| = 1$. Osoita, että

$$\operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Riemannin geometria
Loppukoe
12.11.2008

1. Osoita, että affiini konnektio ∇ on symmetrinen, jos ja vain jos sen Christoffelin symbolit minkä tahansa koordinaattikehyksen suhteen ovat symmetriset, t.s. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

2. Olkoot X, $Y \in \mathcal{T}(M)$, ja $p \in M$. Osoita, että $\left(\nabla_X Y\right)_p$ riippuu vain X_p:stä ja Y:n arvoista pitkin C^∞-polkua γ, jolle $\dot{\gamma}_0 = X_p$ (ja tietenkin konnektiosta ∇).

3. Olkoon M Riemannin monisto ja $p \in M$. Osoita, että on olemassa $r > 0$ ja p:n ympäristö $U \subset M$ siten, että $\exp_p \colon B(0,r) \to U$ on diffeomorfismi.

4. Olkoon $\gamma \colon I \to M$ geodeesi, $0 \in I$ ja $p = \gamma(0)$. Osoita, että jokaiselle $h \in C^\infty(p)$ pätee

$$(h \circ \gamma)''(0) = \operatorname{Hess} h(\dot{\gamma}_0, \dot{\gamma}_0).$$

5. Olkoon M yhtenäinen, täydellinen Riemannin n-monisto. Oletetaan, että on olemassa vakio $H > 0$ siten, että $\operatorname{Ric}(v) \geq (n-1)H$ kaikilla yksikkövektoreilla $v \in TM$, $|v| = 1$. Osoita, että

$$\operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}.$$