Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Riemannin geometria
Loppukoe
7.3.2006

1. Osoita, että affiini konnektio ∇ on symmetrinen, jos ja vain jos sen Christoffelin symbolit minkä tahansa koordinaattikehyksen suhteen ovat symmetriset, t.s. $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

2. Olkoon M Riemannin monisto, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Riemannin metrikka ja ∇ Riemannin konnektio. Reaaliarvoisen funktion $u \in C^\infty(M)$ Hessian on 2-kovariantti tensorikenttä $\operatorname{Hess} f \in \mathcal{T}^2(M)$,

$$\operatorname{Hess} f(X,Y) = \langle \nabla_X(\nabla f), Y\rangle, \quad X, Y \in \mathcal{T}(M).$$

Osoita, että $\operatorname{Hess} f$ on symmetrinen ja

$$\operatorname{Hess} f(X,Y) = X(Yf) - (\nabla_X Y)f.$$

3. Olkoon $Y \in \mathcal{T}(M)$ sellainen vektorikenttä Riemannin monistolla M, että $|Y|$ on vakio. Osoita, että Y ja $\nabla_X Y$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan (ts. $\langle \nabla_X Y, Y\rangle = 0$) kaikilla $X \in \mathcal{T}(M)$.

4. Olkoot M ja N yhtenäisiä Riemannin monistoja ja $f\colon M \to N$ diffeomorfismi. Oletetaan, että N on täydellinen ja että on olemassa sellainen vakio $c > 0$, että

$$|v| \geq c|f_{*p}v|$$

kaikilla $p \in M$ ja kaikilla $v \in T_pM$. Osoita, että M on täydellinen.

5. Olkoon M Riemannin monisto, $p \in M$, $x, y, z \in T_pM$, $|x| = 1$ ja $\gamma = \gamma^x$. Olkoot Y ja Z Jacobin kenttiä pitkin γ:aa siten, että $Y_0 = 0$, $Y_0' = (D_tY)_0 = y$, $Z_0 = 0$ ja $Z_0' = (D_tZ)_0 = z$. Osoita, että

$$\langle Y_t, Z_t\rangle = t^2\langle y, z\rangle - \frac{t^4}{3}\langle R(y,x)x, z\rangle + O(t^5).$$

Department of Mathematics and Statistics
Riemannian Geometry
Final exam
15.5.2007

1. Prove that an affine connection ∇ is symmetric if and only if its Christoffel symbols with respect to any coordinate frame are symmetric, i.e. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

2. Let $\gamma\colon I \to M$ be a C^∞-path. For $t_0, t \in I$, define a mapping (linear isomorphism) $P_{t_0,t}\colon T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t)}M$ by $P_{t_0,t}v = V(t)$, where $V \in \mathcal{T}(\gamma)$ is the parallel transport of $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ along γ. Prove that
$$D_t W(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{P_{t_0,t}^{-1} W(t) - W(t_0)}{t - t_0}$$
for $W \in \mathcal{T}(\gamma)$. [Hint: Use a parallel frame along γ.]

3. Let M be a Riemannian manifold and $p \in M$. Prove that there exist $r > 0$ and a neighborhood $U \subset M$ of p such that $\exp_p\colon B(0,r) \to U$ is a diffeomorphism.

4. Let V be a Jacobi field along a geodesic $\gamma\colon [a,b] \to M$ such that $V_a = 0$ and $V_b = 0$. Prove that
$$\langle V_t, \dot\gamma_t \rangle = \langle V_t', \dot\gamma_t \rangle = 0$$
for all $t \in]a,b[$.

5. Let $\gamma\colon I \to M$ be a geodesic, $0 \in I$, and $p = \gamma(0)$. Prove that, for every $h \in C^\infty(p)$, we have
$$(h \circ \gamma)''(0) = \operatorname{Hess} h(\dot\gamma_0, \dot\gamma_0).$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Riemannin geometria
Loppukoe
22.5.2007

1. Olkoon (U, x), $x = (x^1, \dots, x^n)$, kartta ja olkoon $\partial_1, \dots, \partial_n$ sitä vastaava koordinaattikehys. Osoita, että kaava
$$\nabla_X Y = (a^i b^j \Gamma^k_{ij} + X b^k)\partial_k,$$
missä $X = a^i\partial_i \in \mathcal{T}(U)$ ja $Y = b^i\partial_i \in \mathcal{T}(U)$, määrittelee affiinin konnektion U:ssa.

2. Olkoon $\gamma \colon I \to M$ C^∞-polku. Kun $t_0, t \in I$, niin määritellään kuvaus (lineaarinen isomorfismi) $P_{t_0,t} \colon T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t)}M$ asettamalla $P_{t_0,t}v = V(t)$, missä $V \in \mathcal{T}(\gamma)$ on vektorin $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ yhdensuuntaissiirto pitkin γ:aa (engl. parallel transport of $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ along γ). Osoita, että
$$D_t W(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{P^{-1}_{t_0,t}W(t) - W(t_0)}{t - t_0}$$
kun $W \in \mathcal{T}(\gamma)$. [Ohje: Käytä yhdensuuntaista kehystä (parallel frame) pitkin γ:aa.]

3. Olkoot M ja N yhtenäisiä Riemannin monistoja ja $f \colon M \to N$ diffeomorfismi. Oletetaan, että N on täydellinen ja että on olemassa sellainen vakio $c > 0$, että
$$|v| \ge c|f_{*p}v|$$
kaikilla $p \in M$ ja kaikilla $v \in T_pM$. Osoita, että M on täydellinen.

4. Olkoon M täydellinen Riemannin monisto siten, että $K(\sigma) \le 0$ jokaisella 2-ulotteisella aliavaruudella $\sigma \subset T_pM$ ja kaikilla $p \in M$. Osoita, että $\exp_p : T_pM \to M$ on lokaali diffeomorfismi kaikilla $p \in M$.

5. Olkoon M yhtenäinen, täydellinen Riemannin n-monisto. Oletetaan, että on olemassa vakio $H > 0$ siten, että $\mathrm{Ric}(v) \ge (n-1)H$ kaikilla yksikkövektoreilla $v \in TM$, $|v| = 1$. Osoita, että
$$\mathrm{diam}(M) \le \frac{\pi}{\sqrt{H}}.$$

[In English overleaf.]

Department of Mathematics and Statistics
Riemannian Geometry
Final exam
22.5.2007

1. Let (U, x), $x = (x^1, \dots, x^n)$, be a chart and let $\partial_1, \dots, \partial_n$ be the associated coordinate frame. Verify that the formula

$$\nabla_X Y = \big(a^i b^j \Gamma_{ij}^k + X b^k\big)\partial_k,$$

where $X = a^i \partial_i \in \mathcal{T}(U)$ and $Y = b^i \partial_i \in \mathcal{T}(U)$, defines an affine connection in U.

2. Let $\gamma \colon I \to M$ be a C^∞-path. For $t_0, t \in I$, define a mapping (linear isomorphism) $P_{t_0,t} \colon T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t)}M$ by $P_{t_0,t}v = V(t)$, where $V \in \mathcal{T}(\gamma)$ is the parallel transport of $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ along γ. Prove that

$$D_t W(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{P_{t_0,t}^{-1} W(t) - W(t_0)}{t - t_0}$$

for $W \in \mathcal{T}(\gamma)$. [Hint: Use a parallel frame along γ.]

3. Let M and N be connected Riemannian manifolds and $f \colon M \to N$ a diffeomorphism. Suppose that N is complete and that there exists a constant $c > 0$ such that

$$|v| \geq c|f_{*p}v|$$

for all $p \in M$ and for all $v \in T_pM$. Prove that M is complete.

4. Let M be a complete Riemannian manifold with $K(\sigma) \leq 0$ for every 2-planes $\sigma \subset T_pM$ and for all $p \in M$. Prove that $\exp_p : T_pM \to M$ is a local diffeomorphism for every $p \in M$,

5. Let M be a complete connected Riemannian n-manifold. Suppose that there exists a constant $H > 0$ such that $\mathrm{Ric}(v) \geq (n-1)H$ for all unit vectors $v \in TM$, $|v| = 1$. Prove that

$$\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}.$$

[Suomenkieliset tehtävät kääntöpuolella.]

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Riemannin geometria
Loppukoe
14.6.2007

1. Osoita, että affiini konnektio ∇ on symmetrinen, jos ja vain jos sen Christoffelin symbolit minkä tahansa koordinaattikehyksen suhteen ovat symmetriset, t.s. $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

2. Olkoon M Riemannin monisto, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Riemannin metriikka ja ∇ Riemannin konnektio. Reaaliarvoisen funktion $f \in C^\infty(M)$ Hessian on 2-kovariantti tensorikenttä $\operatorname{Hess} f \in \mathcal{T}^2(M)$,

$$\operatorname{Hess} f(X,Y) = \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle, \quad X, Y \in \mathcal{T}(M).$$

Osoita, että $\operatorname{Hess} f$ on symmetrinen ja että

$$\operatorname{Hess} f(X,Y) = X(Yf) - (\nabla_X Y)f.$$

3. Olkoot M ja N yhtenäisiä Riemannin monistoja ja $f\colon M \to N$ diffeomorfismi. Oletetaan, että N on täydellinen ja että on olemassa sellainen vakio $c > 0$, että

$$|v| \geq c|f_{*p}v|$$

kaikilla $p \in M$ ja kaikilla $v \in T_pM$. Osoita, että M on täydellinen.

4. Olkoon M täydellinen Riemannin monisto siten, että $K(\sigma) \leq 0$ jokaisella 2-ulotteisella aliavaruudella $\sigma \subset T_pM$ ja kaikilla $p \in M$. Osoita, että $\exp_p : T_pM \to M$ on lokaali diffeomorfismi kaikilla $p \in M$.

5. Olkoon M yhtenäinen, täydellinen Riemannin n-monisto. Oletetaan, että on olemassa vakio $H > 0$ siten, että $\operatorname{Ric}(v) \geq (n-1)H$ kaikilla yksikkövektoreilla $v \in TM$, $|v| = 1$. Osoita, että

$$\operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}.$$