University of Helsinki - Recursion Theory
Final Exam

Name:

1. Decide whether the following operators $\Phi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ are monotonic, continuous, recursive.

   (a) $\Phi(f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if dom}(f) \text{ is finite} \\ \uparrow & \text{if dom}(f) \text{ is infinite} \end{cases}$

   (b) $\Phi(f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } f(x) \text{ is defined} \\ \uparrow & \text{o.w.} \end{cases}$

   (c) $\Phi(f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if dom}(f) \text{ is infinite} \\ \uparrow & \text{if dom}(f) \text{ is finite} \end{cases}$

2. Find a minimal triple, i.e., $a, b, c \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ such that

$$\forall d(d \leq a \text{ and } d \leq b \text{ and } d \leq c) \to d = 0$$

   but no subpair is a minimal pair.
   Hint: construct X, Y, Z non recursive so that

$$(\{e_0\}^{X \oplus Y} = \{e_1\}^{Y \oplus Z} = \{e_2\}^{X \oplus Z} = D) \to D \equiv_T 0.$$

3. Prove that there is a total recursive function f such that each $\varphi_{f(x)}$ is total and $\varphi_{f(x)}(x) = f(x) + x$.

4. Prove

   (a) $(A \oplus B) \oplus C \equiv_T A \oplus (B \oplus C)$
   (b) if $A \leq_T C$ and $B \leq_T C$ then $A \oplus B \leq_T C$
   (c) if $A \leq_T \hat{A}$ and $B \leq_T \hat{B}$ then $A \oplus B \leq_T \hat{A} \oplus \hat{B}$

5. Let $A \subset \omega$ be simple. Prove that there exist sets B and C such that

   (a) Both B and C are simple,
   (b) $A = B \cup C$, and

JATKUU, ...

(c) both $A \setminus B$ and $A \setminus C$ are infinite.

[Hint: start with a bijective recursive enumeration $f : \omega \to A$. Note that for any simple H, the set $H^* = \{f(h) | h \in H\}$ is simple. Find a simple J such that $H \cup J = \omega \ldots$]

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Recursion Theory

Loppukoe 24.1.2008/Huuskonen

1. Ovatko seuraavasti määritellyt operaattorit rekursiivisia? Perustele.

   (a) $\Phi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$, $\Phi(f) = f \circ f$,

   (b) $\Psi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$,

$$\Psi(f)(n) = \begin{cases} f(n), & \text{jos } f(n) \text{ määritelty,} \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

2. Olkoon f totaali rekursiivinen funktio. Osoita, että on olemassa sellainen totaali rekursiivinen g, että $f(n) < g(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja että $\operatorname{ran}(g)$ on yksinkertainen.

3. Osoita, että on olemassa sellainen aidosti kasvava totaali rekursiivinen funktio f, että kaikilla $x, y \in \mathbb{N}$ seuraava yhtälö on voimassa:

$$\varphi_{f(x)}(y) = yf(x).$$

   (Erityisesti $\varphi_{f(x)}$ on totaali kaikilla $x \in \mathbb{N}$.)

4. Kuvaile yleisellä tasolla todistusta sille, että jokainen numeroituva osittaisjärjestys on upotettavissa rekursiivisesti lueteltaviin (r.e.) asteisiin.

5. Osoita, että joukossa $\mathcal{D}$ on ylinumeroituva nouseva ketju, ts. on olemassa aidosti kasvava funktio $F : \omega_1 \to \mathcal{D}$.