Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysiä metrisissä avaruuksissa
24.5.2005

1. Osoita, että $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}) = 0$.

2. Miten määritellään L–Lipschitz funktio $f : X \to \mathbb{R}$, missä X on metrinen avaruus? Osoita, että jos $\emptyset \neq A \subset X$ ja $f : A \to \mathbb{R}$ on L–lipschitz, niin on olemassa $f^* : X \to \mathbb{R}$ s.e. f^* on L–lipschitz ja $f^*|A = f$.

3. Miten määritellään kuvauksen $\gamma : [a, b] \to X$, X metrinen avaruus, metrinen derivaatta $|\dot{\gamma}|(t)$, $t \in (a, b)$?

4. Miten määritellään metrisen avaruuden X käyräparven Γ p–moduli. Todista, että p–moduli on ulkomitta X:n käyräparvien joukossa.

5. Näytä, että $M_p(\Gamma) = 0$ täsmälleen silloin, kun on olemassa Borel–funktio $\rho : X \to [0, \infty]$, jolla pätee

$$\int_X \rho^p d\mu < \infty \quad \text{ja} \quad \int_\gamma \rho ds = \infty \quad \text{kaikilla} \quad \gamma \in \Gamma.$$