**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Reaalianalyysi II**
**Loppukoe**
**18.12.2007**

1. Määrittele Hausdorffin mitta $\mathcal{H}^s, 0 < s < \infty$, metrisessä avaruudessa $X$. Todista, että jokaiselle joukolle $A \subset X$ on olemassa Borelin joukko $B \subset X$ siten, että $A \subset B$ ja $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(B)$.

2. Määrittele mittojen heikko konvergenssi. Suppeneeko $\mathbb{R}$:n Diracin mittojen $\delta_{a_i}, i = 1, 2, \ldots$, jono heikosti, kun a) $a_i = (-1)^i$, b) $a_i = i$?

3. Esitä Besicovitchin peitelause $\mathbb{R}^n$:ssä. Anna esimerkki metrisestä avaruudesta, jossa se ei päde.

4. Mitä kertovat Hahnin hajotelma (eli jako), Jordanin hajotelma ja Radon-Nikodymin lause joukon $X$ merkkimitoista? Miten Hahnin hajotelman avulla saadaan Jordanin hajotelma?

5. Esitä Rademacherin lauseen todistuksen päävaiheet ilman yksityiskohtia.

**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Reaalianalyysi II**
**Loppukoe**
**19.12.2007**

1. Määrittele Hausdorffin mitta $\mathcal{H}^s, 0 < s < \infty$, metrisessä avaruudessa $X$. Todista, että Cantorin 1/3-joukolle $C$ $\mathcal{H}^s(C) < \infty$, kun $s = \log 2/\log 3$.
2. Esitä Rieszin esityslause ja sen todistuksen päävaiheet ilman yksityiskohtia.

3. Esitä Besicovitchin peitelause $\mathbb{R}^n$:ssä. Anna esimerkki metrisestä avaruudesta, jossa se ei päde.

4. Määrittele merkkimitta ja sen kokonaisvariaatio (-heilahtelu). Selitä lyhesti, miten kokonaisvariaatiota voidaan käyttää merkkimitan esittämisessä kahden (ei-negatiivisen) mitan erotuksena.

5. Esitä Rademacherin lause ja anna esimerkki Lipschtiz-funktiosta $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, jolle on olemassa ylinumeroituva joukko, jonka pisteissä $f$ ei ole derivoituva.

**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Reaalianalyysi II**
**Loppukoe**
**24.1.2008**

1. Määrittele Hausdorffin mitta $\mathcal{H}^s, 0 < s < \infty$, metrisessä avaruudessa $X$. Todista, että määritelmässä voidaan yleiset peittävät joukot korvata avoimilla joukoilla.

2. Määrittele mittojen heikko konvergenssi. Todista, että jos jono $(\mu_i)$ $\mathbb{R}^n$:n Radonin mittoja suppenee heikosti kohti Radonin mittaa $\mu$, niin jokaiselle $\mathbb{R}^n$:n avoimelle joukolle $U$ on

$$\mu(U) \leq \liminf_{i \to \infty} \mu(U_i).$$

3. Todista, että jos $\mu$ ja $\nu$ ovat $\mathbb{R}^n$:n Radonin mittoja siten, että $\mu(B) \leq \nu(B)$ jokaiselle $\mathbb{R}^n$:n kuulalle $B$, niin $\mu(A) \leq \nu(A)$ kaikille $A \subset \mathbb{R}^n$.

4. Määrittele merkkimitta. Esitä Radon-Nikodymin lause merkkimitoille ja lyhyesti sen todistuksen pääkohdat ilman yksityiskohtia.

5. Olkoon $C \subset [0, 1]$ Cantorin (1/3)-joukko ja

$$f(x) = \inf\{|x - y| : y \in C\}, x \in \mathbb{R}.$$

Osoita, että $f$ ei ole derivoituva missään joukon $C$ pisteessä.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Loppukoe
16.12.2008

**1.** Olkoon $X$ topologinen avaruus, $\tilde{\mu}$ Borel-säännöllinen ulkomitta $X$:ssä ja $A \subset X$ $\tilde{\mu}$-mitallinen s.e. $\tilde{\mu}(A) < \infty$. Osoita, että $\tilde{\mu} \llcorner A$ on Borel-säännöllinen. [Tässä $\tilde{\mu} \llcorner A$ on ulkomitta, joka määritellään kaavalla $(\tilde{\mu} \llcorner A)(B) = \tilde{\mu}(A \cap B)$.]

**2.** Olkoon $X$ separoituva metrinen avaruus ja $K \subset X$. Oletetaan, että on olemassa sellainen $X$:n ulkomitta $\mu$, että $\mu(K) > 0$ ja

$$\mu(U) \leq c_0 d(U)^s$$

kaikilla $U \subset X$, joilla $d(U) \leq \delta_0$, missä $c_0 > 0$, $s > 0$ ja $\delta_0 > 0$ ovat vakioita. Osoita, että tällöin $\dim_{\mathcal{H}}(K) \geq s$.

**3.** Olkoot $f_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f_j \geq 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, sellaisia integroituvia funktioita, että $f_j \to f_0$ $L^1(\mathbb{R}^n)$:ssä. Määritellään

$$\mu_j(A) = \int_A f_j \, dm,$$

kun $A \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen. Osoita, että $\mu_j \rightharpoonup \mu_0$.

**4.** (a) Kerro lyhyesti, mitä ovat itsesimilaarit fraktaalit, mitä tarkoittaa avoimen joukon ehto ja miten se liittyy ko. fraktaalien Hausdorff-dimension määräämiseen.

(b) Olkoot $\mathbb{R}^n$:n similariteetit $\psi_j$, $j = 1, \ldots, k$, aitoja kontraktioita ja $F = \cup_{j=1}^k \psi_j F$ vastaava kompakti invariantti joukko. Osoita, että avoimen joukon ehto toteutuu, jos joukot $\psi_j(F)$ ovat erillisiä.

**5.** Olkoot $\mu$ ja $\nu$ Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Borel-joukko ja $0 < t < \infty$. Todista:

(a) Jos $\overline{D}_\nu \mu(x) \geq t$ kaikilla $x \in A$, niin $\mu(A) \geq t\nu(A)$.

(b) Jos $\underline{D}_\nu \mu(x) \leq t$ kaikilla $x \in A$, niin $\mu(A) \leq t\nu(A)$.

[Vitalin peitelause $\mathbb{R}^n$:n Radon-mitoille oletetaan tunnetuksi.]

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Loppukoe
17.12.2008

**1.** Olkoon $(X, d)$ metrinen avaruus.
(a) Määrittele metrisen ulkomitan käsite.
(b) Olkoon $\tilde{\mu}$ metrinen ulkomitta $X$:ssä, $A \subset X$ ja $G$ avoin joukko siten, että $A \subset G$. Merkitään

$$A_k = \{x \in A\colon \operatorname{dist}(x, G^c) \geq 1/k\}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Osoita, että $\tilde{\mu}(A) = \lim_{k\to\infty} \tilde{\mu}(A_k)$.
(c) Osoita, että metrinen ulkomitta $\tilde{\mu}$ on Borel-ulkomitta eli jokainen $X$:n Borel-joukko on $\tilde{\mu}$-mitallinen.

**2.** Olkoon $(X, d)$ separoituva metrinen avaruus ja $A_k \subset X$, $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että

$$\dim_{\mathcal{H}}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \dim_{\mathcal{H}}(A_k).$$

**3.** Olkoon $(\mu_k)$ jono $\mathbb{R}^n$:n Radon-mittoja, joka suppenee heikosti kohti Radon-mittaa $\mu$. Osoita, että

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k(A) = \mu(A)$$

pätee rajoitetulle Borel-joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$, jos $\mu(\partial A) = 0$.

**4.** Olkoon $X$ metrinen avaruus ja $A, B \subset X$ epätyhjiä $X$:n osajoukkoja. Määrittele $A$:n ja $B$:n välinen *Hausdorff-etäisyys* $d_H(A, B)$. Osoita, että

$$d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$$

kaikilla $A, B, C \subset X$.

**5.** Olkoot $\mu$ ja $\nu$ Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä ja $\mu \ll \nu$. Osoita, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} (D_\nu \mu)^2 \, d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} D_\nu \mu \, d\mu.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Loppukoe
2.4.2009

**1.** Olkoon $(X, d)$ metrinen avaruus.
(a) Määrittele metrisen ulkomitan käsite.
(b) Olkoon $\tilde{\mu}$ metrinen ulkomitta $X$:ssä, $A \subset X$ ja $G$ avoin joukko siten, että $A \subset G$. Merkitään

$$A_k = \{x \in A\colon\ \operatorname{dist}(x, G^c) \geq 1/k\},\ \ k \in \mathbb{N}.$$

Osoita, että $\tilde{\mu}(A) = \lim_{k\to\infty} \tilde{\mu}(A_k)$.
(c) Osoita, että metrinen ulkomitta $\tilde{\mu}$ on Borel-ulkomitta eli jokainen $X$:n Borel-joukko on $\tilde{\mu}$-mitallinen.

**2.** Olkoon $X$ separoituva metrinen avaruus ja $K \subset X$. Oletetaan, että on olemassa sellainen $X$:n ulkomitta $\mu$, että $\mu(K) > 0$ ja

$$\mu(U) \leq c_0 d(U)^s$$

kaikilla $U \subset X$, joilla $d(U) \leq \delta_0$, missä $c_0 > 0$, $s > 0$ ja $\delta_0 > 0$ ovat vakioita. Osoita, että tällöin $\dim_{\mathcal{H}}(K) \geq s$.

**3.** Olkoot $f_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f_j \geq 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, sellaisia integroituvia funktioita, että $f_j \to f_0$ $L^1(\mathbb{R}^n)$:ssä. Määritellään

$$\mu_j(A) = \int_A f_j \, dm,$$

kun $A \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen. Osoita, että $\mu_j \rightharpoonup \mu_0$.

**4.** Olkoot $\mu$ ja $\nu$ Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä ja $\mu \ll \nu$. Osoita, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} (D_\nu \mu)^2 \, d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} D_\nu \mu \, d\mu.$$

**5.** Olkoon $(X, \mathcal{M})$ on mitallinen avaruus ja $\mu\colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$ merkkimitta. Oletetaan, että $(P, P^c)$ ja $(D, D^c)$ ovat $\mu$:n Hahnin hajotelmia.
(a) Osoita: Jos $A \in \mathcal{M}$ ja $A \subset (D \setminus P) \cup (P \setminus D)$, niin $\mu(A) = 0$.
(b) Osoita: Jos $A \in \mathcal{M}$ ja $A \subset (D^c \setminus P^c) \cup (P^c \setminus D^c)$, niin $\mu(A) = 0$.
(c) Osoita, että $\mu(A \cap D) = \mu(A \cap P)$ ja $\mu(A \cap D^c) = \mu(A \cap P^c)$ kaikilla $A \in \mathcal{M}$.