Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Loppukoe
9.8.2007

1. Määrittele mittojen absoluuttinen jatkuvuus. Anna esimerkit mitoista μ ja ν siten, että a) μ on absoluuttisesti jatkuva ν:n suhteen, mutta ν ei ole absoluuttisesti jatkuva μ:n suhteen, b)μ ei ole absoluuttisesti jatkuva ν:n suhteen eikä ν μ:n suhteen.

2. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja $1 \leq p < q < r \leq \infty$. Osoita, että jos $f \in L^q(\mu)$, niin on olemassa $g \in L^p(\mu)$ ja $h \in L^r(\mu)$ siten, että $f = g + h$.

3. Määrittele konvoluutio. Osoita, että jos $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja g on tasaisesti jatkuva, niin $f * g$ on jatkuva.

4. Todista, että jos μ on mitta $\mathbb{R}^n$:n Borelin joukkojen σ-algebrassa ja $\mu(B(x,r)) \leq m(B(x,r))$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$ niin $\mu(U) \leq m(U)$ kaikille avoimille joukoille $U \subset \mathbb{R}^n$.

5. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuva, $1 < p < \infty$ ja $f' \in L^p([a, b])$. Osoita, että on olemassa $C \in \mathbb{R}$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha},$$

missä $\alpha = 1 - 1/p$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Loppukoe
24.1.2008

1. Anna esimerkki mitta-avaruudesta (X, Γ, μ), jossa μ saa vain arvot 0,1/4, 3/4 ja 1. Onko mahdollista, että μ saisi vain arvot 0, 1/4 ja 1?

2. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritelty siten, että $f(x) = |x|^{-1/3}$, kun $x \in \mathbb{R}$. Millä p :n arvoilla, $1 \leq p \leq \infty$, on a) $f \in L^p([0,1]$, b) $f \in L^p([1,\infty)$?

3. Esitä ja todista Egorovin lause.

4. Määrittele Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktio Mf. Todista, että jos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $\lambda > 0$, niin

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq 5^n ||f||_1/\lambda.$$

5. Osoita, että jos $f : [a,b] \to [c,d]$ on absoluuttisesti jatkuva ja aidosti kasvava ja $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva, niin $g \circ f$ on absoluuttisesti jatkuva.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Loppukoe
13.5.2008

1. Määrittele jonon $p = (p_1, p_2, \ldots)$, $0 < p_j < 1$, määräämä Cantorin joukko $E(p) \subset [0,1]$. Konstruoi sellainen jono $p = (p_1, p_2, \ldots)$, että sen määräämän Cantorin joukon mitta on $1/2$.

2. Oletetaan, että $p, q, r \in]1, +\infty[$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$ ja $h \in L^r$. Osoita, että $fgh \in L^1$ ja

$$\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

Hölderin epäyhtälön voi olettaa tunnetuksi.

3. Anna Hardy-Littlewood maksimaalifunktion Mf määritelmä, kun $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ on lokaalisti integroituva funktio. Osoita, että $Mf(x) < \infty$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ aina kun $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

4. Olkoon $I =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$ ja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in I; \\ 0, & \text{jos } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{I}. \end{cases}$$

Osoita, että f voidaan määritellä I:n reunalla ∂I niin, että

$$\lim_{r \to 0+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x)$$

pätee kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$.

5. (a) Määrittele käsitteet *funktion kokonaisheilahtelu* $V_f(a,b)$, *rajoitetusti heilahteleva funktio* ja *absoluuttisesti jatkuva funktio.*

(b) Todista: Jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva ja $g(x) = V_f(a,x)$, kun $x \in [a,b]$, niin g on myös absoluuttisesti jatkuva.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Loppukoe
20.5.2008

1. Johda L^p avaruuksien Minkowskin epäyhtälö Hölderin epäyhtälöstä tapauksessa $1 < p < \infty$.

2. Oletetaan, että $f_j \to f$ avaruudessa $L^p(\mathbb{R}^n)$ ja $g_j \to g$ avaruudessa $L^q(\mathbb{R}^n)$, missä $p, q > 1$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Osoita, että $f_j g_j \to fg$ avaruudessa $L^1(\mathbb{R}^n)$.

3. Muotoile Egorovin lause ja todista muun muassa sen avulla seuraava väite. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen, $m(A) < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $f, f_1, f_2, \ldots \in L^p(A)$ ja $f_j \to f$ m.k. Tällöin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa kompakti joukko $F \subset A$ siten, että

$$\int_{A \setminus F} |f|^p dm < \varepsilon$$

ja $f_j|F \to f|F$ tasaisesti.

4. (a) Anna Hardy-Littlewood maksimaalifunktion Mf määritelmä, kun $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ on lokaalisti integroituva funktio.
(b) Muotoile Hardy-Littlewoodin lause avaruuden $L^1(\mathbb{R}^n)$ funktioille.
(c) Hardy-Littlewoodin lauseen todistus perustuu erääseen peitelauseeseen. Muotoile tämä lause.
[Huom.: Kohtien (b) ja (c) lauseita ei tarvitse todistaa.]

5. Onko funktio $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{\pi}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

absoluuttisesti jatkuva? Perustelu!

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Loppukoe
12.6.2008

1. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $1 \leq p < q < r \leq \infty$ ja $f \in L^q(X)$. Osoita, että on olemassa sellaiset $g \in L^p(X)$ ja $h \in L^r(X)$, että $f = g + h$.

2. Olkoon $1 < p < \infty$ ja $q = \frac{p}{p-1}$. Sanomme, että jono (u_j), $u_j \in L^p(\mu)$, *suppenee heikosti* $L^p(\mu)$*:ssä* kohti funktiota $u \in L^p(\mu)$, jos kaikilla $g \in L^q(\mu)$

$$\int_X u_j g \, d\mu \longrightarrow \int_X ug \, d\mu, \text{ kun } j \to \infty .$$

   (a) Osoita, että $f_j \to f$ heikosti $L^p(\mu)$:ssä, jos $f_j \to f$ $L^p(\mu)$:ssä.
   (b) Olkoon $X = [0,1]$ ja $u_j = j^{1/p}\chi_{[0,1/j]}$, kun $j = 1, 2, \ldots$. Näytä, että jono (u_j) suppenee heikosti L^p:ssä kohti 0-funktiota, mutta ei L^p:ssä (ts. $\|u_j\|_p \not\to 0$).

3. (a) Anna Hardy-Littlewood maksimaalifunktion Mf määritelmä, kun $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ on lokaalisti integroituva funktio.
   (b) Todista: Jos $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n)$, niin $f = 0$ m.k.

4. (a) Määrittele käsitteet *funktion kokonaisheilahtelu* $V_f(a, b)$ ja *rajoitetusti heilahteleva funktio* $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$.
   (b) Todista: Jos $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on rajoitetusti heilahteleva ja $g(x) = V_f(a, x) - f(x)$, kun $x \in [a, b]$, niin g on kasvava.

5. Olkoon $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuva ja $E \subset [a, b]$ 0-mittainen joukko ($m(E) = 0$). Osoita, että myös kuvajoukko fE on 0-mittainen.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Loppukoe
14.8.2008

1. Johda L^p avaruuksien Minkowskin epäyhtälö Hölderin epäyhtälöstä tapauksessa $1 < p < \infty$.

2. Olkoon $X = B^n(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ ja $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\log|x|)^2$, $x \neq 0$. Millä p:n arvoilla $f \in L^p(X)$?

3. (a) Anna Hardy-Littlewood maksimaalifunktion Mf määritelmä, kun $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ on lokaalisti integroituva funktio.
   (b) Osoita, että $Mf\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ on mitallinen funktio.

4. Olkoot A ja B sellaisia mitallisia $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja, että
$$m\big(A \cap B^n(x, 1/i)\big) \leq m\big(B \cap B^n(x, 1/i)\big),$$
kun $x \in A$ ja $i = 1, 2, \ldots$. Osoita, että $m(A) \leq m(B)$.

5. Onko funktio $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{\pi}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
absoluuttisesti jatkuva? Perustelu!

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Loppukoe
12.11.2008

1. (a) Määrittele käsitteet:
   (i) joukon X σ-algebra ja
   (ii) avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-joukkojen perhe $\mathrm{Bor}\mathbb{R}^n$.
(b) Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ Borel-joukko ja $f\colon G \to \mathbb{R}^m$ Borel-kuvaus. Osoita, että $f^{-1}B \in \mathrm{Bor}\mathbb{R}^n$ kaikilla $B \in \mathrm{Bor}\mathbb{R}^m$.

2. Osoita, että $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$, jos $\mu(X) < \infty$ ja $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

3. Olkoon $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mitallinen ja $0 < f(x) < \infty$ melkein kaikilla $x \in [0,1]$. Osoita, että

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\right) \geq 1.$$

4. (a) Anna Hardy-Littlewood maksimaalifunktion Mf määritelmä, kun $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ on lokaalisti integroituva funktio.
(b) Muotoile Hardy-Littlewoodin lause avaruuden $L^1(\mathbb{R}^n)$ funktioille.
(c) Hardy-Littlewoodin lauseen todistus perustuu erääseen peitelauseeseen. Muotoile tämä lause.
[Huom.: Kohtien (b) ja (c) lauseita ei tarvitse todistaa.]

5. Olkoon $f\colon [0,1] \to [0,2]$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2\big(1 + \sin(1/x)\big), & \text{jos } 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{jos } x = 0, \end{cases}$$

ja $g\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$.
(a) Osoita, että f ja g ovat absoluuttisesti jatkuvia.
(b) Osoita, ettei $g \circ f$ ole rajoitetusti heilahteleva.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Loppukoe
22.1.2009

1. (a) Määrittele mitä tarkoittaa *avaruuden* $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, *Cauchy-jono* (f_j).
(b) Todista: Jos (f_j) on Cauchy-jono avaruudessa $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, niin on olemassa osajono (f_{j_k}), joka suppenee melkein kaikkialla.

2. Olkoon $\mu(X) < \infty$ ja $f \in L^p(X)$ kaikilla $p \in [1, \infty)$. Osoita, että

$$\|f\|_p \to \|f\|_\infty ,$$

kun $p \to \infty$.

3. Olkoon (f_j) jono ei-negatiivisia Lebesgue-mitallisia funktioita $f_j \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\int_{\mathbb{R}} f_j dm \to 0.$$

Päteekö tällöin, että $f_j(x) \to 0$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}$? [Perustele vastauksesi!]

4. Olkoon $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ lokaalisti integroituva funktio.
(a) Määrittele f:n Hardy-Littlewood maksimaalifunktio Mf.
(b) Osoita (esimerkiksi Hardy-Littlewood lausetta käyttäen), että jokaisella $t > 0$ pätee

$$m\big(\{x \in \mathbb{R}^n \colon Mf(x) > t\}\big) \leq \frac{2 \cdot 5^n}{t} \int_{\{x \colon |f(x)| > t/2\}} |f(y)| dy.$$

5. (a) Määrittele käsite: *absoluuttisesti jatkuva funktio* $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$.
(b) Todista: Jos $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ovat absoluuttisesti jatkuvia, niin $u \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $u(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, on myös absoluuttisesti jatkuva.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Loppukoe
12.5.2009

1. Määrittele jonon $p = (p_1, p_2, \ldots)$, $0 < p_j < 1$, määräämä Cantorin joukko $E(p) \subset [0,1]$. Laske $m\big(E(p)\big)$, kun

$$p_j = 1 - e^{-a^j} \quad \text{ja} \quad 0 < a < 1.$$

2. Olkoon $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mitallinen ja $0 < f(x) < \infty$ melkein kaikilla $x \in [0,1]$. Osoita, että

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\right) \geq 1.$$

3. Olkoon $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva ja kompaktikantajainen ja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Osoita, että $f * g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on jatkuva.

4. Olkoon $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ lokaalisti integroituva funktio.

(a) Määrittele f:n Hardy-Littlewood maksimaalifunktio Mf.

(b) Kun $t > 0$, niin olkoon $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |f(x)| \leq t/2\}$, $g = f\chi_{A_t}$ ja $h = f - g$. Osoita, että

$$\{x \in \mathbb{R}^n \colon Mf(x) > t\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \colon Mh(x) > t/2\}.$$

(c) Osoita (esimerkiksi Hardy-Littlewood lausetta käyttäen), että jokaisella $t > 0$ pätee

$$m\big(\{x \in \mathbb{R}^n \colon Mf(x) > t\} \leq \frac{2 \cdot 5^n}{t} \int_{\{x \colon |f(x)| > t/2\}} |f(y)|dy.$$

5. (a) Määrittele käsite: *rajoitetusti heilahteleva funktio* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

(b) Olkoon $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jono funktioita, jotka suppenevat pisteittäin kohti funktiota $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, toisin sanoen,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Osoita, että

$$V_f(a,b) \leq \liminf_{n\to\infty} V_{f_n}(a,b).$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Loppukoe
11.6.2009

1. Olkoon $X = B^n(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ ja $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\log|x|)^2$, $x \neq 0$. Millä p:n arvoilla $f \in L^p(X)$?

2. Oletetaan, että $p, q, r \in]1, +\infty[$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$ ja $h \in L^r$. Osoita, että $fgh \in L^1$ ja

$$\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

Hölderin epäyhtälön voi olettaa tunnetuksi.

3. Muotoile Egorovin lause ja todista muun muassa sen avulla seuraava väite. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen, $m(A) < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $f, f_1, f_2, \ldots \in L^p(A)$ ja $f_j \to f$ m.k. Tällöin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa kompakti joukko $F \subset A$ siten, että

$$\int_{A \setminus F} |f|^p dm < \varepsilon$$

ja $f_j|F \to f|F$ tasaisesti.

4. Anna Hardy-Littlewood maksimaalifunktion Mf määritelmä, kun $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ on lokaalisti integroituva funktio. Osoita, että $Mf(x) < \infty$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ aina kun $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

5. Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuva, $1 < p < \infty$ ja $f' \in L^p([a,b])$. Osoita, että on olemassa $C \in \mathbb{R}$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

kaikilla $x, y \in [a,b]$, missä $\alpha = 1 - 1/p$.