HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Ramseyn teoria
Loppukoe, 12. 6. 2008

Käsittele seuraavista tehtävistä **viittä**.

1. *Turnauksella* tarkoitetaan suunnattua verkkoa $T = (V, E)$, jossa särmärelaatio $E \subset V \times V$ toteuttaa seuraavan ehdon: kaikilla $(x, y) \in E$ pätee $(y, x) \notin E$. Turnaus on *täydellinen*, jos eri solmuilla $x, y \in V$ pätee joko $(x, y) \in E$ tai $(y, x) \in E$. Täydellinen turnaus on *transitiivinen*, jos verkkorelaatio E on transitiivinen.

Todista Ramseyn lause täydellisille turnauksille: Kaikilla $k \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen $r \in \mathbb{N}$, että jokaisella r solmun täydellisellä turnauksella T on k solmun transitiivinen aliturnaus T' (ts. transitiivinen $T' = T|A$ jollakin k-alkioisella A).

[Tuloksen voit todistaa joko suoraan tai luentojen lauseista.]

2. Osoita, että jokaista $k \in \mathbb{N}$ vastaa sellainen $r \in \mathbb{N}$, että mielivaltaiselle tason r pisteen joukolle A pätee seuraavaa: on olemassa sellainen $B \subset A$, $|B| = k$, että minkään kahden B:n pisteen etäisyys ei ole yksi.

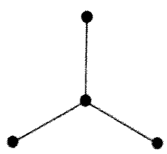
3. Oletetaan tunnetuksi, että on olemassa joukon $\mathbb{N}$ ultrafiltteri D, jolle $D + D = D$. Muotoile ja todista Hindmanin lause.

4. Olkoon $r \in \mathbb{N}$ ja $\mathcal{A}$ ääretön perhe joukkoja, joissa on r alkiota.

a) Todista, että perheellä $\mathcal{A}$ on sellainen ääretön osaperhe $\mathcal{B}$, että perheen $\mathcal{B}$ kahden joukon leikkaukset ovat samankokoisia eli on olemassa $m \in \mathbb{N}$, jolle $|A \cap B| = m$, kun $A, B \in \mathcal{B}$.

b) Todista, että perheellä $\mathcal{B}$ on edelleen ääretön osaperhe $\mathcal{C}$, jolla on *juuri* J, ts. kaikilla eri $A, B \in \mathcal{C}$ pätee $A \cap B = J$.

5. Olkoon G kuvan verkko ja $n \in \mathbb{N}^*$. Määritä $r(G, K_n)$.



6. Osoita, että avaruuden $[\mathbb{N}]^\omega$ Vietoriksen topologia on aidosti hienompi kuin tavanomainen topologia.

7. Muotoile Ellentuckin lause ja esittele siinä esiintyvät käsitteet. [Lausetta ei tarvitse todistaa.]

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Ramseyn teoria
Loppukoe, 17. 12. 2008

Käsittele seuraavista tehtävistä **viittä**

1. Muotoile Halesin ja Jewettin lause sekä äärellinen van der Waerdenin lause, ja osoita, että edellisestä seuraa jälkimmäinen.

2. Osoita, että jokaista $k \in \mathbb{N}$ vastaa sellainen $r \in \mathbb{N}$, että mielivaltaiselle euklidisen tason r pisteen joukolle A pätee seuraavaa: on olemassa sellainen $B \subset A$, $|B| = k$, että minkään kahden B:n pisteen etäisyys ei ole yksi.

3. Todista Ramseyn lause äärettömille verkoille: Äärettömässä verkossa on aina ääretön klikki tai ääretön riippumaton joukko.

4. Olkoon $\mathcal{A}$ ääretön perhe joukkoja, joissa on $r \in \mathbb{N}$ alkiota. Todista, että perheellä $\mathcal{A}$ on ääretön osaperhe $\mathcal{B}$, joka on Δ-systeemi, ts. on olemassa sellainen joukko J (Δ-systeemin juuri), että kaikilla eri $A, B \in \mathcal{B}$ pätee $A \cap B = J$.

5. Laske verkkojen Ramseyn luku $r(K_3, C_4)$, missä K_3 on kolmen solmun täydellinen verkko ja C_4 nelisykli.

6. Todista, että topologisen avaruuden Borelin joukoilla on Bairen ominaisuus.

7. Todista seuraava luentojen lause: Olkoon $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]^{<\omega}$. Oletetaan, että jokaista $M \in [\mathbb{N}]^{\omega}$ vastaa sellainen $N \in [M]^{\omega}$, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $N \cap n \in \mathcal{A}$. Tällöin on olemassa $H \in [\mathbb{N}]^{\omega}$, jolle $[H]^{<\omega} \subset \mathcal{A}$.

[Todistuksessa saa käyttää Ellentuckin lausetta.]

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Ramseyn teoria
Loppukoe, 22. 1. 2009

Käsittele seuraavista tehtävistä viittä.

1. Oletetaan, että $R(k-1,l)$ ja $R(k,l-1)$ ovat parillisia, missä $k,l \in \mathbb{N}$ ja $k,l \geq 2$. Todista, että

$$R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1) - 1.$$

2. Todista Schurin lemma: Olkoon $\chi\colon \mathbb{N}^* \to F$ äärellinen väritys. Tällöin on olemassa sellaiset $x, y \in \mathbb{N}^*$, että x, y ja $x+y$ ovat samanvärisiä. [Voit todistaa Schurin lemman joko luentojen lauseista tai suoraan.]

3. Todista ääretön Ramseyn lause: Olkoot $k, c \in \mathbb{N}^*$. Olkoon $\chi\colon [\mathbb{N}]^k \to c$ väritys. Tällöin on olemassa ääretön $H \subset \mathbb{N}$, jolle $[H]^k$ on yksivärinen.

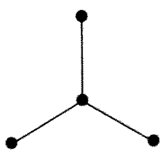
4. Esitä esimerkki ylinumeroituvasta verkosta, jossa ei ole ylinumeroituvaa klikkiä eikä ylinumeroituvaa riippumatonta joukkoa.

5. Olkoot G ja H äärellisiä verkkoja. Osoita, että

$$r(G,H) \geq (\chi(G)-1)(c(H)-1)+1,$$

missä $r(G,H)$ on verkkojen G ja H Ramseyn luku, $\chi(G)$ on verkon G väritysluku ja $c(H)$ verkon H suurimman komponentin koko.

6. Olkoon G kuvan verkko ja $n \in \mathbb{N}^*$. Määritä $r(G, K_n)$.



7. Todista seuraava luentojen lause: Olkoon $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]^{<\omega}$. Oletetaan, että jokaista $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ vastaa sellainen $N \in [M]^\omega$, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $N \cap n \in \mathcal{A}$. Tällöin on olemassa $H \in [\mathbb{N}]^\omega$, jolle $[H]^{<\omega} \subset \mathcal{A}$.

[Todistuksessa saa käyttää Ellentuckin lausetta.]