Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Ramseyn teoria
Loppukoe
18. 6. 2004

Käsittele seuraavista tehtävistä **viittä**

**1.** Van der Waerdenin funktio $W\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ määritellään niin, että jokaisella $k \in \mathbb{N}^*$ $W(k)$ on pienin sellainen luku $w \in \mathbb{N}^*$, että jokaisella värityksellä $\chi\colon \{0, \ldots, w-1\} \to \{0, 1\}$ on olemassa pituutta $k$ oleva yksivärinen aritmeettinen jono. Laske $W(3)$.

**2.** Todista Schurin lemma: Olkoon $\chi\colon \mathbb{N}^* \to F$ äärellinen väritys. Tällöin on olemassa sellaiset $x, y \in \mathbb{N}^*$, että $x$, $y$ ja $x + y$ ovat samanvärisiä. [Voit todistaa Schurin lemman joko luentojen lauseista tai suoraan.]

**3.** Muotoile äärellinen ja ääretön Ramseyn lause ja osoita, että jälkimmäisestä seuraa edellinen. Voit halutessasi rajoittua sekä lauseiden muotoilussa että todistuksessa verkkoihin.

**4.** Näytä, että

$$2^\omega \not\to (\omega_1)^2_2.$$

**5.** Olkoot $G$ ja $H$ äärellisiä verkkoja. Osoita, että

$$r(G, H) \geq (\chi(G) - 1)(c(H) - 1) + 1,$$

missä $r(G, H)$ on verkkojen $G$ ja $H$ Ramseyn luku, $\chi(G)$ on verkon $G$ väritysluku ja $c(H)$ verkon $H$ suurimman komponentin koko.

**6.** Todista, että topologisen avaruuden Borelin joukoilla on Bairen ominaisuus.

**7.** Muotoile Ellentuckin lause ja esittele siinä esiintyvät käsitteet. [Lausetta ei tarvitse todistaa.]