Rahoitusteoria, Tentti (03.04.08) Helsingin Yliopisto , Matematiikan ja Tilastotieteen laitos

Huomautuksia: tentin kesto on neljä tuntia. Saa käyttää kurssimateriaalia, kirjoia ja taskulaskimia.

Sovitaan myös että ratkaisemalla oikein kolme tehtävää, te suoritatte kurssia parhaalla arvosanalla 5/5.

Tehtävä 1. Oletamme 1-perioodisen markkinamallin jossa on kaksi osaketta $S_t^{(1)}$ ja $S_t^{(2)}$, $t \in \{0,1\}$, ja pankkitili sijoitus $S_t^{(0)}$. Todennäköisyys-avaruus on $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ja todennäköisyys mitta on P jolla $P(\{\omega_i\}) > 0$, $i = 1,2,3$.

Oletamme että $S_1^{(0)} = S_0^{(0)}(1+r)$ jossa $r = 0.1$, ja

$$
\begin{aligned}
&S_1^{(1)}(\omega_1) = S_0^{(1)}(1 + u^{(1)}) \\
&S_1^{(1)}(\omega) = S_0^{(1)}(1 + d^{(1)}) \quad \text{jos} \quad \omega \in \{\omega_2, \omega_3\} \quad , \\
&S_1^{(2)}(\omega) = S_0^{(2)}(1 + d^{(2)}) \quad \text{jos} \quad \omega \in \{\omega_1, \omega_2\} \quad , \\
&S_1^{(1)}(\omega_3) = S_0^{(2)}(1 + u^{(2)}) \quad .
\end{aligned}
$$

Olkoon myös $u^{(1)} = 0.4$, $d^{(1)} = -0.3$, $u^{(2)} = 0.7$, $d^{(2)} = -0.1$, $S_0^{(1)} = S_0^{(2)} = 1$.

i) Osoita että markkinamalli on arbitraasi-vapaa ja täydellinen.

ii) Laske hinta ja suojaustrategia optiolle

$$F(\omega) = \left\{ S_1^{(1)}(\omega) - S_1^{(2)}(\omega) \right\}^2$$

Tehtävä 2. Oletamme 1-perioodisen markkinamallin jossa samoin kuin tehtävässa 1, on kaksi osaketta $S_t^{(1)}$ ja $S_t^{(2)}$ mutta pankkitili ei ole käytössä.

i) Osoita että markkinamalli on arbitraasivapaa

ii) Onko malli täydellinen ?

iii) Laske arbitraasi-vapaa hintojen joukko $\mathcal{C}$ vaateelle $G = \left\{S_1^{(1)}\right\}^2$.

iv) Valitse arbitraasivapaa hinta $c \in \mathcal{C}$ vaateelle G.

Otetaan käyttöön laajennettu markkinamalli johon on lisätty kolmas instrumentti $S_t^{(3)}$, jossa $S_0^{(3)} = c$ ja $S_1^{(3)}(\omega) = G(\omega) = \{S_1^{(1)}(\omega)\}^2$.

v) Osoita että laajennettu malli on arbitraasivapaa ja täydellinen, ja laske hinta ja suojaus-strategia vaadeelle

$$F(\omega) = (S_1^{(1)} - S_1^{(2)})^2$$

laajennettulla markkinamallilla.

Tehtävä 3. Oletamme klassisen diskreettiaikasen Cox-Rubinstein-Ross binomimallin, jossa on yksi osake (S_t) ja yksi riskiton bondi (B_t), jossa $S_t = S_{t-1}(1 + R_t)$ ja R_t ovat riippumattomia ja samoin jakutuneita binääri-muuttujat joilla on arvot $\{d, u\}$ jossa $-1 < d < r < u$ ja

$$p = P(R_t = u) = 1 - P(R_t = d), \quad 0 < p < 1 \ ,$$

ja riskiton bondille pätee $B_t = B_{t-1}(1 + r)$,

Olkoon $S_0 = B_0 = 1$, ja $d = -0.1$, $r = 0.2$, $u = 0.4$, $p = 0.8$.

i) Laske yksikäsitteinen ekvivalentti martingaali mitta $\tilde{P}$ diskontatulle osakehinnalle.

Olkoon $\{Y_t : t = 0, 1, 2\}$ amerikkalainen optio jossa $Y_t = E_P(S_T | S_t)$. (Huomataan että P ei ole välttämättä martingaali mitta).

ii) Laske amerikkalaisen option $\{Y_t : t = 0, 1, 2\}$ hinta, optimaalinen ostajan strategia, ja myyjan suojausportfolio.

Tehtävä 4. Oletetaan aika-jatkuva Black-Scholes malli dollari/euro kurssille S_t, joka on stokastisen differentiaali yhtälön (SDY) ratkaisu

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t),$$
$$S_0 = 0.63$$

jossa $\mu = 1, \sigma = 0.5$, ja (W_t) on Brownin liike P mitan suhteen.

i) Kirjoita ja ratkaise stokastinen differentiaali yhtälö euro/dollari kursille

$$S'_t := \frac{1}{S_t}.$$

Oletamme nyt että on käytössä yksi pankkitili dollareissa vakio korolla $r = 0.3$, ja yksi pankkitil euroissa, vakio korolla $r' = 0.2$.

ii) Valitse dollari numeräärinä ja kirjoita SDY korko-diskontatulle euro/dollari hinta prosessille. Laske sille ekvivalentti martingaali mitta $Q' \sim P$ ja kirjoita uskottavuusosamääräprosessi $Z_t = dQ'_t/dP_t$.

iii) Samoin, valitse euro numeräärinä ja kirjoita SDY korko-diskontatulle dollari/eurolle hintaprosessille. Laske sille ekvivalentti martingaalimitta $Q \sim P$ ja uskottavuusosamääräprosessi $Z_t = dQ_t/dP_t$. $Z_t = dQ_t/dP_t$.

iv) Valitse jompikumpi euro tai dollari numeräärinä, ja laske eurooppalisen option $F = (S'_T - S'_0)^+$, hinta jossa $T = 1$.

v) Rippuuko tämän option hinta numeräärin valinnasta ?

Rahoitusteoria, Tentti (12.06.08) Helsingin Yliopisto , Matematiikan ja Tilastotieteen laitos

Huomautuksia: tentin kesto on neljä tuntia. saa käyttää taskulaskimia, mutta ei saa enää käyttää kurssimateriaalia eikä kirjallisuutta.

Tehtävä 1. Todennäköisyys avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ oletamme 1-perioodi malli jossa on satunnainen osake $(S_t(\omega) : t = 0, 1)$ $S_t \geq 0$, ja riskiton sijoitus $(B_t : t = 0, 1)$ jossa $B_1 = B_0(1 + r)$ $r > 0$.

Selitä mikä on arbitraasi, mikä on riskineutraali mitta ja miten se liittyy arbitraasi strategioiden olemassaoloon.

Tehtävä 2. Olkoon todennäköisyys avaruus $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ varustettu filtraatiolla $\{\mathcal{F}_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$, jossa σ-algebroiden jono on kasvava, siis $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1} \subseteq \mathcal{F}$.

Anna martingaali määritelmä ja keksi (epätriviiali) esimerkki martingaalista.

Tehtävä 3. Oletamme aikadiskreetti binomimalli jossa on edelleen yksi osake $(S_t(\omega) : t = 0, \ldots, T)$ ja riskiton sijoitus $(B_t : t = 0, 1)$ jossa

$$B_t = B_{t-1}(1 + r) \qquad , r > -1 \qquad \text{ja}$$
$$S_t(\omega) = S_{t-1}(\omega)(1 + R_t(\omega)), \qquad \text{jossa tuotoille pätee}$$
$$R_t(\omega) = \begin{cases} (1 + u) & \text{todennäköisyydellä } p, \\ (1 + d) & \text{muuten} \end{cases}$$

jossa $0 < p < 1$ ja satunnaimuuttujat $R_1, \ldots, R_T$ ovat P:n suhteen rippumattomia ja samoin jakautuneita.

Oletamme $0 < p = 0.25 < 1$, $S_0 = B_0 = 1$, $-1 < d = -0.2 < r = 0.1 < u = 0.3$.

Osoita että malli on arbitraasi vapaa ja täydellinen. Laske europpalaisen osto option $F(\omega) = (S_T(\omega) - 1)^+$ hinta ja suojausstrategia, jossa $T = 2$.

Tehtävä 4. Jatkuvassa ajassa, oletamme Black ja Scholesin mallia jossa $S_0 = B_0 = 1$

$$dS_t = S_t\, b\, dt + S_t\, a\, dW_t$$
$$dB_t = B_t\, r\, dt$$

jossa $(W_t : t \in [0, T])$ on Brownin liike objektivisen mitan P:n suhteen, ja stokastisessa differentiaali yhtälössä tulkitaan Iton integraalin kautta.

Olkoon $a = 1, b = 2, r = 1,\ S_0 = B_0 = 1$.

Laske (W_t):n prosessin driftin (martingaali-hajotelman) eqvivalenttimartingaali mitan suhteen ja laske hinta (tai anna hinnalle esitys eqvivalenttimartingaalimitan avulla) europpalaiselle optiolle $F(\omega) = S_T^2(\omega)$, jossa $T = 1$.

Rahoitusteorian välikoe , (21.10.08),

Huom. Saa käyttää taskulaskinta. Kokeen kesto on 4 tuntia. Rahoitusteorian luennot jatkuvat maanantaina 27.10.

Välikokeen Tehtävät

Diskreetti todennäköisyysavaruudessa $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, jossa $P(\{\omega_1\}) = 0.6$, $P(\{\omega_2\}) = 0.1$, $P(\{\omega_3\}) = 0.3$, olkoon satunnaismuuttujat $S^0(\omega), S^1(\omega)$ osakkeiden arvot hektellä $t = 1$ yhden periodin markkina mallissa. Huomataan että ei ole muita instrumentteja käytössä, siis ei pankkitilia deterministisella tuotolla ei voi käyttää.

Osakkeiden hinnat hetkellä $t = 0$ ovat $\pi^0 = \pi^1 = 1$,

ja hetkellä $t = 1$ ovat satunnaisia, arvoilla

$$S^0(\omega_1) = 1.8, \quad S^0(\omega_2) = S^0(\omega_3) = 0.8,$$
$$S^1(\omega_1) = 0.6, \quad S^1(\omega_2) = 1.6, \quad S^1(\omega_3) = 0.8.$$

1) Valitse S_0 numeräärinä. löydä kaikki eqvivalentti-riskineutraali mittoja $Q \sim P$, ja vastaa perustelemalla kysymyksiin : Onko markkinamalli arbitraasivapaa ? Onko markkinamalli täydellinen ?

2) Löydä myös kaikki eqvivalentti-riskineutraali mittoja $Q \sim P$ numeräärillä S_1.

Edellisessä markkinamallissa, olkoon $X(\omega) := \mathbf{1}(\omega = \omega_1)$ digitaali-optio, jolla hetkellä $t = 1$ saa arvoa 1 jos ja vain jos $\omega = \omega_1$, 0 muuten.

3) Laske arbitraasivapaa hintojen joukko digitaali-optiolle $X(\omega)$.

Tarkastellaan nyt laajennettu osakemalli jolla digitaali-optiolle $X(\omega)$ hetkellä $t = 0$ on sovittu alkuhinta $c(X) = 0.2$.

4) Osoita että laajennettu markkinamalli $(S^0, S^1, X; \pi^0, \pi^1, c(X))$ on arbitraasi vapaa ja täydellinen.

5) Laske hinta-ja suojaus strategia toiselle digitaalioptiolle $Y(\omega) := \mathbf{1}(\omega = \omega_2)$ laajennetussa markkinamallissa $(S^0, S^1, X; \pi^0, \pi^1, c(X))$.

Rahoitusteorian tentti , (16.12.08),

Huomautuksia : Saa käyttää taskulaskinta ei saa käyttää kurssimateriaalia eikä kirjallisuutta.

Jos olet jo suorittanut ensimmäisen välikokeen, sinun ei tarvitse ratkaista tehtävää 1 yhden periodin mallista . Kokeen kesto on 4 tuntia kaikille.

Keskiviikkona 17.12 kello 12 luokassa B321 esitämme tentin ratkaisut.

Maanantaina 22.12 kello 10-14 luokassa D123 on toinen mahdollisuus suorittaa tätä tenttia. Jos haluat parantaa arvosanasi, olet tervetuloa tenttimaan uudelleen.

Ole hyvä ja muistakaa myös antamaan luennotsijalle nimetonta kurssipalautetta nettilomakkeella.

Osa I : Yhden perioodin malli

Tehtävä 1

Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon satunnaismuuttuja $U(\omega)$ tasaisesti jakautunut välissä $[0,1]$. Siis

$$P(\{\omega : a < U(\omega) \leq b\}) = (b-a) \text{ kun } 0 \leq a \leq b \leq 1 \; .$$

Yhden perioodin markkinamallissa on kaksi instrumenttia:

riskiton pankkitili B jolla

$$B_0(\omega) = 1 \text{ kun } t = 0 \text{ ja } B_1(\omega) = 6/5 \text{ kun } t = 1.$$

ja osake S jolla

$$S_0(\omega) = 1 \text{ kun } t = 0 \text{ ja } S_1(\omega) = \big(1/2 + U(\omega)\big) \text{ kun } t = 1.$$

Kysymys 1.i) Osoita että markkinamalli on arbitraasivapaa mutta ei ole täydellinen, esittämällä kahta erilaista riskineutraalimittaa.

Vihjeet: Yksi tapa (joka tietysti ei ole aino tapa) jolla voi saada riskineutraalimitan on seuraava:

Olkoon $V(\omega) \sim$Tasainen(a,b) jossa $0 \leq a < b \leq 1$, siis kun $a \leq r \leq u \leq b$

$$P(r < V \leq u) = (u-r)/(b-a)$$

ja $I(\omega) \in \{0,1\}$ binäärisatunnaismuuttuja. Oletamme että I, V, U ovat riippumattomia P-mitan suhteen,

$$P(I=1) = 1 - P(I=0) = \varepsilon \in [0,1)$$

ja sitten määrittelemme

$$\widehat{U}(\omega) = I(\omega)V(\omega) + (1 - I(\omega))U(\omega)$$

Osoita ensi että $\hat{U}$:n jakauma on equivalentti U:n jakauman kanssa, siis että

$$P(\widehat{U} \in A) = 0 \Longleftrightarrow P(U \in A) = 0$$

Laske ensi $E_P(\widehat{U})$, parametrien ε, a, b funktiona ja esitä parametriarvot jolla P tule olemaan riskineutraali markkinamallissa $(B, \widehat{S})$ jossa

$$\begin{aligned} &\widehat{S}_0(\omega) = S_0(\omega) \text{ kun } t = 0 \text{ ja} \\ &\widehat{S}_1(\omega) = \big(1/2 + \widehat{U}(\omega)\big) = \big(1/2 + I(\omega)V(\omega) + (1 - I(\omega))U(\omega)\big) \text{ kun } t = 1\ . \end{aligned}$$

Kysymys 1.ii) Laske europpalaisen osto-option $F(\omega) = \big(S_1(\omega) - 1\big)^+$ arbitraasivapaahintojen joukko $\mathcal{C}(F)$.

Vihje: tutki diskontatun option ja diskontatun osakkeen yhteisjakauman supportin conveksipeitton sisus.

Osa II : aikadiskreetti markkinamallit

Tehtävä 2) Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on annettu aikadiskreetti filtraatio $\{\mathcal{F}_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$.

Käsittelemme binoomi-markkina malli joss on riskiton pankkitili instrumentti $B_t = B_0 = 1$ jolla on 0 tuotto jokaisella ajanhetkellä $t = 1, \ldots, T$, ja osakeinstrumentti S_t joka on $\mathcal{F}_t$-adaptoitu prosessi jolla $S_0 = 1$ ja

$$0 < P(S_t = S_{t-1}(1+u)|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) = \Big\{1 - P(S_t = S_{t-1}(1+d)|\mathcal{F}_{t-1})(\omega)\Big\} < 1$$

P melkein varmasti kaikille $t \in \{1, 2, \ldots T\}$.

Tässä $-1 < d < 0 < u$ ovat deterministiset vakiot Olkoon $d = -0.2$ ja $u = 0.3$.

Kysymys 2.i) Etsi mallin yksikäsitteinen riski neutraali mitta, ja näytä että malli on täydellinen ja arbitraasi-vapaa.

Kysymys 2.ii) Osoita ehdollisen odotusarvon määritelmän avulla että (S_t) on martingaali riskineutraali mitan suhteen.

Kysymys 2.iii) Laske hinta europpalaiselle osto-optiolle $F(\omega) = (S_T(\omega))^2$, jossa maturiteetti on $T = 2$.

Kysymys 2.iv) Laske option suojaus strategia.

Vihje: Muistakaa että diskreetti satunnaismuuttuja X on binoomi jakautunut parametreille $p \in [0, 1]$ ja $n \in \mathbb{N}$ kun

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

jos $k = 0, \ldots, n$, ja $P(X = k) = 0$ muuten.

Osa III : jatkuvan ajan markkina mallit

Tehtävä 3

Käsittelemme yksinkertäistettu jatkuva-aikainen Black ja Scholes markkina malli, jossa on sijoitusinstrumenttit (B_t) ja (S_t), (pankkitili sijoitus ja osakesijoitus) jossa

$$dS_t = S_t \sigma dW_t, \quad S_0 > 0$$
$$B_t = B_0 = 1, \quad (\text{ pankkitilin korko on } 0)$$

jossa W_t on Brownin liike todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ja $\sigma \neq 0$ on deterministinen vakio.

Siis, S_t on stokastisen differentiaali yhtälön ratkaisu

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_u \sigma dW_u$$

jossa esintyy Ito-Föllmerin integraali.

Kysymys 3.i) Näytä Iton kaavan avulla että

$$S_t = S_0 \exp\Big(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\Big)$$

Kysymys 3.ii) Näytä että S_t on P martingaali Brownin liikkeen filtraatiossa $(\mathcal{F}_t^W)$, josta seuraa että P on riski-neutraali.

Vihje: muistakaa että

$$E(\exp(\theta X)) = \exp\Big(\theta\mu + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2\Big)$$

gaussiselle satunnaismuuttujalle $X = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Kysymys 3.iii) Käsitellään europpalainen osto-optio

$$G(\omega) = W_T(\omega) = g(S_T) = \sigma^{-1}\log(S_T/S_0) + \frac{1}{2}\sigma T$$

Ito-Clark martingaali esityslauseen ja Iton kaavan avulla, etsi suojaus strategiaa ja hintaa osto-optiolle G:lle.

Vihje: Muistakaa Ito Clarck esityslause:

jos $G \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^W, P)$ jossa $\mathcal{F}_T^W = \sigma(W_s : s \in [0,T])$, seuraa että on olemassa $H_s(\omega)$ adaptoitu Brownin liikkeen filtratiossa, jolle

$$\int_0^T E_P(H_s^2)ds < \infty$$

ja ennustus-martingaalilla on muotoa

$$E_P(F|\mathcal{F}_t^W) = E_P(F) + \int_0^T H_s dW_s$$

Rahoitusteorian tentti (22.01.09),

Huomautuksia : Saa käyttää taskulaskinta, ei saa käyttää kurssimateriaalia eikä kirjallisuutta.

Jos olet jo suorittanut ensimmäisen välikokeen, sinun ei tarvitse ratkaista tehtävää 1 yhden periodin mallista . Kokeen kesto on 4 tuntia kaikille.

Ole hyvä ja muista antamaan luennotsijalle nimetonta kurssipalautetta nettilomakkeella.

Osa I : Yhden perioodin malli

Tehtävä 1

Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon satunnaismuuttuja $U(\omega)$ tasaisesti jakautunut välissä $[0,1]$. Siis

$$P(\{\omega : a < U(\omega) \le b\}) = (b-a) \text{ kun } 0 \le a \le b \le 1 \ .$$

Yhden perioodin markkinamallissa on kaksi instrumenttia:

riskiton pankkitili B jolla

$$B_0(\omega) = 1 \text{ kun } t = 0 \text{ ja } B_1(\omega) = 6/5 \text{ kun } t = 1.$$

ja osake S jolla

$$S_0(\omega) = 1 \text{ kun } t = 0 \text{ ja } S_1(\omega) = \big(1/2 + U(\omega)\big) \text{ kun } t = 1.$$

Kysymys 1.i) Osoita että markkinamalli on arbitraasivapaa mutta ei ole täydellinen, esittämällä kahta erilaista riskineutraalimittaa.

Kysymys 1.ii) Laske europpalaisen osto-option $F(\omega) = \big(S_1(\omega) - 1\big)^+$ arbitraasivapaahintojen joukko $\mathcal{C}(F)$.

Vihje: tutki diskontatun option ja diskontatun osakkeen yhteisjakauman supportin conveksipeitton sisus.

Kysymys 1.iii) Kiinnitetään $c^F \in \mathcal{C}(F)$ arbitraasi-vapaa markkina-hinta osto optiolle $F(\omega) = \big(S_1(\omega) - 1\big)^+$.

Laske eurooppaisen myynti option $G(\omega) = \big(1 - S_1(\omega)\big)^+$ hinta ja suojausstrategia laajennetussa markkinamallissa jossa instrumentit ovat (B, S, F).

Osa II : aikadiskreetti markkinamallit

Käsittelemme markkinamalli jossa on instrumenttia $(B_t, S_t : t = 0, 1, 2, \dots, T)$.
Tässä (B_t) on riskiton instrumentti jolla
$B_0 = 1$, ja

$$B_t = B_{t-1}(1 + r)$$

deterministisella korolla $r > -1$, ja $(S_t) > 0$ on osake jolla

$$S_t(\omega) = S_{t-1}(\omega)(1 + R_t(\omega)) \qquad t = 0, 1, \dots, T$$

satunnaisella tuotolla $R_t(\omega) \in \{d, u\}$, jollekin $-1 < d < r < u$, ja

$$0 \quad < \quad P(R_t = u|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) \quad = \quad 1 - P(R_t = d|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) \quad < \quad 1$$

Kysymys 2.i) Onko malli arbitraasi vapaa ? Onko malli täydellinen ? Mikä on riski-neutraali mitta ?

Kysymys 2.ii) Olkoon adaptoitu prosessi $\{F_t(\omega), t = 0, 1, \dots T\}$ amerikkalaisen option sisäinen arvo. Siis jos hetkellä $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ optio on vielä lunastamatta, option haltija voi lunastaa optionsa ja saada $F_t(\omega)$:n arvoa.

Selitä amerikkalaisen option haltijan optimaaliset lunastus-strategiat.

Vihje: selitä ensi miten option haltija tule toimimaan optimaalisesti silloin kun $t = (T - 1)$ ja amerikkalainen optio on vielä lunastamatta.

Osa III : jatkuvan ajan markkina mallit

Tehtävä 3

Käsittelemme jatkuva-aikainen Black ja Scholes markkina malli, jossa on sijoitusinstrumenttit (B_t) ja (S_t), (pankkitili sijoitus ja osakesijoitus) jossa

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 > 0$$
$$dB_t = B_t r dt, \qquad , B_0 = 1$$

jossa W_t on Brownin liike todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mu, r \in \mathbb{R}$ ja $\sigma \neq 0$ ovat deterministisiä, $S_0 > 0$, $B_0 = 1$.

Kysymys 3.i) Osoita Iton kaavan avulla että

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_u \sigma dW_u = S_0 \exp\Big(\sigma W_t + \{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\}t\Big)$$
$$B_t = B_0 \exp(rt) = \exp(rt)$$

Kysymys 3.ii) Olkoon $\widetilde{S}_t = (S_t/B_t)$ diskontattu hinta prosessi. Mitä stokastista differentiaaliyhtälöä toteuttaa $\widetilde{S}_t$?

Etsi parametrien arvot μ, σ, r jolla diskontattu hinta prosessi $\widetilde{S}_t$ on martingaali alkuperäisen mitan P:n suhteen.
Vihje: käytä Iton kaava tai osittaisintegrointi.

Kysymys 3.iii) Oletamme jatkossa että diskontattu osakeprosessi $\widetilde{S}_t$ on jo martingaali alkuperäisen mitan P:n suhteen.

Olkoon optio $F(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^W, P)$. Seuraa että diskontatulla optiolla $\widetilde{F}(\omega) = F(\omega)B_T^{-1} = F(\omega)\exp(-rT)$ on Ito Clarck esitys

$$\widetilde{F}(\omega) = E_P(\widetilde{F}) + \int_0^T H_s dW_s \ ,$$

jossa Ito integraalissa esintyy W joka on alkuperäinen Brownin liike alkuperäisen P mitan suhteen, ja $H_s(\omega)$ on adaptoitu prosessi jolla

$$\int_0^T E(H_s^2) ds < \infty \ .$$

Oleta nyt että odotusarvo $E_P(\widetilde{F})$ ja (H_s) prosessi tunnetaan.

Mikä on option hinta $c(F)$? Miksi ?

Laske myös suojaus strategia $\pi_t = (\beta, \gamma_t)$ jolla portfolion arvo prosessi

$$V_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t$$

toistaa option, siis $V_T(\omega) = F(\omega)$.

Vihje $V_t = (\widetilde{V}_t B_t)$ jossa $\widetilde{V}_t = V_t B_t^{-1} = V_t \exp(-rt)$ on diskontattu portfolion arvo prosessi. Käytä sitten osittaisintegroininn kaava.

Rahoitusteorian tentti (02.04.09),

Huomautuksia : Saa käyttää taskulaskinta ja taulukoita, ei saa käyttää kurssimateriaalia eikä kirjallisuutta. Kokeen kesto on 4 tuntia.

Osa I : Yhden perioodin malli

Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on annettu yhden perioodin markkinamalli jossa on kaksi instrumenttia:

Riskiton pankkitili B jolla

$$B_0(\omega) = 1, \quad \text{kun } t = 0 \quad \text{ja} \quad B_1(\omega) = 6/5 \quad \text{kun } t = 1.$$

ja osake S jolla

$S_0(\omega) = 1$ kun $t = 0$ kaikille ω:lle ,

kun $t = 1$ $S_1(\omega)$ on satunnaismuuttuja jolla

$P\big(S_1(\omega) \in \{4/5,\ 1,\ 6/5,\ 7/5\}\big) = 1$, ja $P\big(S_1(\omega) = k/5\big) = 1/4$ kun $k \in \{\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

Kysymys 1.i) Osoita että markkinamalli on arbitraasivapaa mutta ei ole täydellinen, esittämällä kahta erilaista riskineutraalimittaa.

Kysymys 1.ii) Laske europpalaisen osto-option $F(\omega) = \big(S_1(\omega) - 1\big)^+$ arbitraasivapaahintojen joukko $\mathcal{C}(F)$.

Vihje: tutki diskontatun option ja diskontatun osakkeen yhteisjakauman supportin conveksipeitton sisus.

Kysymys 1.iii) Valitse arbitraasi-vapaa markkina-hinta $c^F \in \mathcal{C}(F)$ osto optiolle $F(\omega) = \big(S_1(\omega) - 1\big)^+$.

Siis laajennettu markkina malli (B, S, F) alkuhinnoilla (B_0, S_0, c^F) on arbitraasivapaa. Voiko olla myös täydellinen ?

Kysymys 1.iv) Laske eurooppaisen myynti option $G(\omega) = \big(1 - S_1(\omega)\big)^+$ hinta ja suojausstrategia laajennetussa markkinamallissa jossa instrumentit ovat (B, S, F).

Vihje: muista osto- ja myynti-optioiden pariteetti.

Osa II : aikadiskreetti markkinamallit

Käsittelemme markkinamalli jossa on instrumenttia $(B_t, S_t : t = 0, 1, 2, \ldots, T)$.
Tässä (B_t) on riskiton instrumentti jolla
$B_0 = 1$, ja

$$B_t = B_{t-1}(1 + r)$$

deterministisella korolla $r > -1$, ja $(S_t) > 0$ on osake jolla

$$S_t(\omega) = S_{t-1}(\omega)(1 + R_t(\omega)) \qquad t = 0, 1, \ldots, T$$

satunnaisella tuotolla $R_t(\omega) \in \{d, u\}$, jollekin $-1 < d < r < u$, ja

$$0 \quad < \quad P(R_t = u|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) \quad = \quad 1 - P(R_t = d|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) \quad < \quad 1$$

Kysymys 2.i) Onko malli arbitraasi vapaa ? Onko malli täydellinen ? Mikä on riski-neutraali mitta ?

Kysymys 2.ii) Esitä option $F(\omega) = \{S_T(\omega)\}^2$ arbitraasi vapaa hinta ja suojaus strategia .

Osa III : jatkuvan ajan markkina mallit

Käsittelemme jatkuva-aikainen Black ja Scholes markkina malli, jossa on sijoitusinstrumenttit (B_t) ja (S_t), (pankkitili sijoitus ja osakesijoitus) jossa

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 > 0$$
$$dB_t = B_t r dt, \qquad , B_0 = 1$$

jossa W_t on Brownin liike todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mu, r \in \mathbb{R}$ ja $\sigma \neq 0$ ovat deterministisiä, $S_0 > 0$, $B_0 = 1$.

Kysymys 3.i) Osoita Iton kaavan avulla että

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_u \mu dt + \int_0^t S_u \sigma dW_u = S_0 \exp\left(\sigma W_t + \{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\}t\right)$$
$$B_t = B_0 \exp(rt)$$

Kysymys 3.ii) Olkoon $\widetilde{S}_t = (S_t/B_t)$ diskontattu hinta prosessi. Mitä stokastista differentiaaliyhtälöä toteuttaa $\widetilde{S}_t$?

Kysymys 3.iii) Etsi μ parametrin arvo, jolla annetuilla parametreilla σ, r diskontattu hinta prosessi $\widetilde{S}_t$ on martingaali alkuperäisen mitan P:n suhteen.
Vihje: käytä Iton kaava tai osittaisintegrointi.

Kysymys 3.iv) Oletamme että diskontattu hinta prosessi $\widetilde{S}_t$ on martingaali alkuperäisen mitan P:n suhteen . Mikä on europpalaisen osto option $F(\omega) = (S_T(\omega) - K)^+$ hinta ? Miksi ?

Vihje Muista martingaali-esitys lause.

Rahoitusteorian tentti (11.06.09) HY Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Huomautuksia: tentin kesto on neljä tuntia. Ei saa käyttää kurssimateriaalia eikä kirjoia, taskulaskimia ja matemaattisia taulokoita saa käyttää.

Tehtävä 1. Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, oletamme yhden perioodin markkinamalli jossa on instrumentit (osakkeet ja pankkitili)

$$(S_t^{(0)}(\omega), S_t^{(1)}(\omega), \ldots, S_t^{(d)}(\omega)), \quad t \in \{0, 1\}$$

jossa $S_0^{(i)}(\omega) = s_0^{(i)} > 0$ ovat deterministisia ja $S_1^{(i)}(\omega) > 0$ ovat satunnaismuuttujat, $i = 0, 1, \ldots, d$.

Kysymys 1.a We choose first as numeraire the instrument Olkoon numerääri $S^{(0)}$. Selitä seuraavat käsitykset: tässä markkinmallissa, mikä on riski-neutraali mitta Q eqvivalentti P mitan kanssa, $S^{(0)}$ numeräärin suhteen ?

Kysymys 1.b Oletetaan että Q on riski-neutraali numeräärillä $S^{(0)}$, ja Q on eqvivalentti P:n kanssa. Mitanvaihtokaavan avulla määrittele riskineutraali mitta $\widetilde{Q}$ numeräärin $S^{(1)}$:n suhteen.

Kysymys 1.c Selitä mikä on arbitraasi ja todista että jos on olemassa riski-neutraali mitta Q eqvivalentti P:n kanssa jollekkin numeräärin välinnälle, seuraa että markkinamalli on arbitraasivapaa.

Tehtävä 2.

Oletamme 1-perioodisen markkinamallin jossa on kaksi osaketta $S_t^{(1)}$ ja $S_t^{(2)}$, $t \in \{0, 1\}$, ja pankkitili sijoitus $S_t^{(0)}$. Todennäköisyys-avaruus on $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ja todennäköisyys mitta on P jolla $P(\{\omega_i\}) > 0$, $i = 1, 2, 3$.

Oletamme että $S_1^{(0)} = S_0^{(0)}(1+r)$ jossa $r = 0.1$, ja

$$\begin{aligned} S_1^{(1)}(\omega_1) &= S_0^{(1)}(1+u^{(1)}) \\ S_1^{(1)}(\omega) &= S_0^{(1)}(1+d^{(1)}) \quad \text{jos} \quad \omega \in \{\omega_2, \omega_3\} \quad , \\ S_1^{(2)}(\omega) &= S_0^{(2)}(1+d^{(2)}) \quad \text{jos} \quad \omega \in \{\omega_1, \omega_2\} \quad , \\ S_1^{(1)}(\omega_3) &= S_0^{(2)}(1+u^{(2)}) \quad . \end{aligned}$$

Olkoon myös $u^{(1)} = 0.4$, $d^{(1)} = -0.3$, $u^{(2)} = 0.7$, $d^{(2)} = -0.1$, $S_0^{(1)} = S_0^{(2)} = 1$.

Kysymys 2.a Osoita että markkinamalli on arbitraasi-vapaa ja täydellinen.
Kysymys 2.b Laske hinta ja suojaustrategia optiolle

$$F(\omega) = \left\{ S_1^{(1)}(\omega) - S_1^{(2)}(\omega) \right\}^2$$

Tehtävä 3. Oletamme 1-perioodisen markkinamallin jossa on samaa kaksi osaketta $S_t^{(1)}$ ja $S_t^{(2)}$ kuten tehtävässä 1, mutta pankkitili ei ole käytössä.

Kysymys 3.a Osoita että markkinamalli on arbitraasivapaa

Kysymys 3.b Onko malli täydellinen ?

Kysymys 3.c Laske arbitraasivapaiden hintojen joukko $\mathcal{C}$ vaateelle $G = \left\{ S_1^{(1)} \right\}^2$.

Tehtävä 4 Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon jatkuvan ajan Black ja Scholesin markkinamalli jossa on osake $S_t(\omega)$, joka on stokastisen differentiaaliyhtälön ratkaisu

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t \, a \, dW_t, \\ S_0 &= 1 \end{aligned}$$

jossa (W_t) on Brownin liike P-mitan suhteen, volatiliteetti a on vakio, ja B_t on pankkitilisijoitus korolla $r = 0$, jossa $B_0 = 1$.

Määrittelemme σ-algebran $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : s \leq t)$.

Kysymys 4.a Osoita Iton kaavan avulla että

$$S_t = S_0 \exp\{aW_t - \frac{a^2}{2}t\}$$

Kysymys 4.b Selitä martingaalin määritelmä ja osoita että P on riski neutraali mitta markinamallille (S_t, B_t) numeräärillä B (pankkitili).

Vihje: Muistetaan että jos W on gaussinen satunnaismuuttuja odotusarvolla 0 ja variansilla σ^2,

$$E(\exp(\theta W)) = \exp\Big(\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\Big)$$

Kysymys 4.c Onko P riskineutraal myös silloin kun valitaan numerääriksi S (osake) ? Perustele vastauksesi.

Tehtävä 5 Jatkaamme tehtävän 4:n asetuksessa.

Muistetaan Iton esityslause: Kun satunnais muuttuja $X(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^W, P)$, on olemassa $\{\mathcal{F}\}$-sopiva (adaptoitu) prosessi $Y_s(\omega)$ jolla

$$E_P\bigg(\int_0^T Y_s(\omega)^2 ds\bigg) < \infty$$

ja

$$X(\omega) = E_P(X) + \int_0^T Y_s dW_s$$

Kysymys 5.a Olkoon $X(\omega) = g(S_T(\omega))$ eurooppalainen optio , jossa $g(s)$ on rajoitettu mitallinen funktio. Selitä miten Iton esityksen avulla löytyy suojausstrategia ja yksikäsitteinen hinta optiolle X.

Kysymys 5.b Iton esityslauseesta seuraa myös että ehdolliselle odotusarvolle pätee

$$E_P(X(\omega)|\mathcal{F}_t^W) = E_P(X) + \int_0^t Y_s dW_s, \qquad 0 \le t \le T$$

koska molemmille martingaaleille on sama loppullinen arvo $X(\omega)$ hetkellä T.

Olkoon $X(\omega) = (W_T(\omega))^2$, joka vastaa $X(\omega) = g(S_T(\omega))$ kun

$$g(s) = \left\{\frac{\log(s)}{a} - \frac{aT}{2}\right\}^2$$

Iton kaavan tai osittaisintegrointikaavan avulla laske sopivan prosessin (Y_t) Iton esityksessä, option $(W_T)^2$ hinta ja sen suojaus-strategia.

Huomautus: tämä optio on valittu siksi että laskut olisivat mahdollisimmin yksinkertäisiä .