Rahoitusteoria (3 ov), Loppukoe 18.3. 2003

1. Olkoon $S_0 = 120$, $K = 100$, $y = 1/4$, $a = -1/3$, $r = 1/12$ ja $f(S_2) = S_2 1_{\{S_2 \geq K\}}$. Laske option $f(S_2)$ tasapuolinen hinta c_f.

2. Olkoon $S_0 = 150$, $K = 140$, $y = 2/5$, $a = -1/5$ ja $r = 1/10$. Laske amerikkalaisen option

$$f_k = (K - S_k)^+, k = 0, 1, 2$$

tasapuolinen hinta.

3. Osoita, että strategia $\pi = (\beta_k, \gamma_k)_{k=1}^N$ on omavarainen jos ja vain jos strategian π diskontatulle varallisuudelle $\bar{V}^\pi$ pätee, että

$$\bar{V}_n^\pi = v + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta \bar{S}_k,$$

kun $n \geq 1$.

4. Selosta, kuinka martingaalimitan olemassaolosta seuraa, että hinnoittelumallissa ei voi tehdä arbitraasia omavaraisilla strategiolla.

Rahoitusteoria (5 ov) Loppukoe kesäkuu 2004

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

1. Olkoon $S_0 = 150$, $K = 110$, $y = 2/5$, $a = -1/5$, $r = 1/10$ ja $f(S_2) = \min(K, S_2)$. Laske option $f(S_2)$ tasapuolinen hinta c_f. Näytä että pätee $c_f \leq (1+r)^{-2}K$.

2. Tarkastellaan diskreettiaikaista hinnoittelumallia $(\Omega, F, \mathbb{F}, \underline{S}, \mathbb{P})$. Olkoon $C \geq 0$ jokin rajoitettu vaade. Oletetaan, että C on suojattavissa ja että hinnoittelumalli on arbitraasivapaa. Osoita, että $\mathbb{E}_Q C =$ vakio kaikilla martingaalimitoilla $Q \in \mathcal{P}$.

3. Tarkastellaan B-S hinnoittelumallia, missä $S_t = S_0 e^{\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}$ ja W on Brownin liike mitan $\mathbb{P}$ suhteen. Mikä on eurooppalaisen option $f_T \doteq S_T 1_{\{K \leq S_T \leq L\}}$ tasapuolinen hinta, kun $r = 0$ ja $L > K > 0$.

[Muistin virkistämiseksi: tässä Black-Scholes hinnoittelumalli tarkoittaa mallia, missä talletuksen B dynamiikka on $dB_t = rB_t dt, B_0 = 1$ ja osakkeen S dynamiikka on $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ alkuarvona $S_0 > 0$.]

4. Selosta kuinka Ito-Clark esityslausetta käytetään Black-Scholes– hinnoittelumallin täydellisyyden osoittamiseksi.

Koeaika 4 tuntia.

Rahoitusteoria (5 ov) Loppukoe lokakuu 2004

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

1. Olkoon $S_0 = 150$, $K = 110$, $y = 2/5$, $a = -1/5$, $r = 1/10$ ja $f(S_2) = \min(K, S_2)$. Laske option $f(S_2)$ tasapuolinen hinta c_f. Näytä että pätee $c_f \leq (1+r)^{-2}K$.

2. Tarkastellaan diskreettiaikaista hinnoittelumallia $(\Omega, F, \mathbb{F}, \underline{S}, \mathbb{P})$. Olkoon $C \geq 0$ jokin rajoitettu vaade. Oletetaan, että C on suojattavissa ja että hinnoittelumalli on arbitraasivapaa. Osoita, että $\mathbb{E}_Q C =$ vakio kaikilla martingaalimitoilla $Q \in \mathcal{P}$.

3. Tarkastellaan B-S hinnoittelumallia, missä $S_t = S_0 e^{\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}$ ja W on Brownin liike mitan $\mathbb{P}$ suhteen. Mikä on eurooppalaisen option $f_T \doteq S_T 1_{\{K \leq S_T \leq L\}}$ tasapuolinen hinta, kun $r = 0$ ja $L > K > 0$.
[Muistin virkistämiseksi: tässä Black-Scholes hinnoittelumalli tarkoittaa mallia, missä talletuksen B dynamiikka on $dB_t = rB_t dt, B_0 = 1$ ja osakkeen S dynamiikka on $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ alkuarvona $S_0 > 0$.]

4. Selosta kuinka Ito-Clark esityslausetta käytetään Black-Scholes– hinnoittelumallin täydellisyyden osoittamiseksi.

Koeaika 4 tuntia.

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos **Loppukoe**
Rahoitusteoria **24.5.2005**

Tehtävissä 1 ja 2 tarkastelemme yhden askeleen yhden osakkeen kolmen tilan mallia, jossa korko $r > 0$ ja

$$\begin{array}{cccll} & & S_0(1+u) & \text{tn:llä} & p \\ & \nearrow & & & \\ S_0 & \rightarrow & S_0(1+m) & \text{tn:llä} & q \\ & \searrow & & & \\ & & S_0(1+d) & \text{tn:llä} & 1-(p+q), \end{array}$$

missä $d < m < u$.

1. Milloin malli on (a) arbitraasivapaa ja (b) täydellinen? Perustele vastauksesi.

2. Olkoon F digitaalioptio $F(S_1) = \mathbf{1}_{\{S_1 = S_0(1+u)\}}$. Laske sen osto- ja myyntihinnat silloin, kun (a) malli on arbitraasivapaa ja (b) kun mallissa on arbitraasia.

Tehtävissä 3 ja 4 tarkastelemme kahden askeleen binomipuuta

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 16 \\ & & & \nearrow & \\ & & 8 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 4 & & & & 4 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 2 & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & 1, \end{array}$$

missä $r = 0{,}25$.

3. Laske look-back-option

$$f(S) = \max_{0 \le t \le 2} (S_t - 5)^+$$

suojausstrategia.

4. Määrää optimaaliset hetket käyttää amerikkalainen myyntioptio

$$f(S_t) = (5 - S_t)^+.$$

5. Johda Black–Scholes-osittaisdifferentiaaliyhtälö.

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos **Loppukoe**
Rahoitusteoria **10.8.2005**

Tehtävissä 1 ja 2 tarkastelemme yhden askeleen yhden osakkeen kolmen tilan mallia, jossa korko $r > 0$ ja

$$
\begin{array}{ccll}
 & & S_0(1+u) & \text{tn:llä } p \\
 & \nearrow & & \\
S_0 & \rightarrow & S_0(1+m) & \text{tn:llä } q \\
 & \searrow & & \\
 & & S_0(1+d) & \text{tn:llä } 1-(p+q),
\end{array}
$$

missä $d < m < u$.

1. Määrittele mallin ekvivalenttien riskineutraalien mittojen joukko.

2. Laske myyntioption $(S_0 - S_1)^+$ osto- ja myyntihinnat silloin, kun (a) malli on arbitraasivapaa ja (b) kun mallissa on arbitraasia.

   (Vihje: kohta (b) on kompa.)

Tehtävissä 3 ja 4 tarkastelemme kahden askeleen binomipuuta

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & 16 \\
 & & & \nearrow & \\
 & & 8 & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
4 & & & & 4 \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & 2 & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & 1,
\end{array}
$$

missä $r = 0{,}25$.

3. Laske digitaalioption

   $$f(S_2) \quad = \quad \mathbf{1}_{\{S_2=16\}}$$

   suojausstrategia.

4. Määrää optimaaliset hetket käyttää amerikkalainen osto-optio

   $$f(S_t) \quad = \quad (S_t - 5)^+.$$

5. Olkoon $F = f(S_T)$ (rajoitettu) eurooppalainen vaade Black–Scholes-hinnoittelumallissa. Johda sen suojausstrategia $\pi = (\beta_t, \gamma_t)_{t\in[0,T]}$. Et voi olettaa, että korko on nolla.

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos **Loppukoe**
Rahoitusteoria **26.1.2006**

1. Määrittele seuraavat rahoitusteorian peruskäsitteet:
   (a) arbitraasivapaus,
   (b) täydellisyys,
   (c) otaksuma tehokkaista markkinoista.

2. Tarkastelemme kahden askeleen binomipuuta

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & 16 \\
 & & & \nearrow & \\
 & & 8 & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
4 & & & & 4 \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & 2 & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & 1,
\end{array}
$$

   missä $r = 0$. Laske look-back-option

$$f(S) \;=\; \max_{0\leq t\leq 2}(S_t - 5)^+$$

   suojausstrategia ja tasapuolinen hinta

3. Olkoon $F = f(S_T)$ jokin (yksinkertainen) ehdollinen vaade binomimallissa. Johda kaava (tai algoritmi) sen suojausstrategialle $\pi = (\beta_t, \gamma_t)_{t\leq T}$.

   Kaavan, tai algoritmin, parametrit siis ovat f, u, d, r ja T.

4. Olkoon $(B, S, \Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ dynaaminen diskreettiaikainen hinnoittelumalli, jolla on ekvivalentti martingaalimitta $\mathbf{Q}$. Osoita, että $(B, S, \Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ arbitraasivapaa.

5. Olkoon $F = f(S_T)$ eurooppalainen vaade Black–Scholes-hinnoittelumallissa. Johda sen kaava sen suojausstrategialle $\pi = (\beta_t, \gamma_t)_{t\in[0,T]}$.

   Kaavan, tai algoritmin, parametrit siis ovat f, μ, σ, r ja T.

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos **Loppukoe**
Rahoitusteoria **14.6.2006**

1. Esitä eurooppalaisen myyntioption hinta vastaavan osto-option, osakkeen hinnan, lunastushinnan ja koron funktiona.

2. Tarkastelemme kahden askeleen binomipuuta

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 16\\ & & & \nearrow & \\ & & 8 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 4 & & & & 4\\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 2 & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & 1, \end{array}$$

   missä $r = 0{,}25$. Laske "aasialaisen" option

$$f(S) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{2} S_t$$

   suojausstrategia ja tasapuolinen hinta.

3. Mikä on Snellin peite ja miten se liittyy amerikkalaisten optioiden hinnoitteluun?

   Tarkastele kysymystä binomimallissa option kirjoittajan kannalta.

4. Osoita, että (jatkuva- tai diskreettiaikainen) hinnoittelumalli on arbtraasivapaa, jos on olemassa sellainen ekvivalentti mitta $\mathbf{Q}$, että kaikilla hyväksyttävillä strategioilla π varallisuus V^{π} on $(\mathbf{Q}, \mathbb{F})$-martingaali.

5. Johda Black–Scholes-osittaisdifferentiaaliyhtälö käyttämällä Iton kaavaa.

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos **Loppukoe**
Rahoitusteoria **9.8.2006**

1. Tarkastelemme keskeistä lelumallia

$$
\begin{array}{ccll}
 & & S_1(1) = S_0(1+u) & \text{tn:llä } p \\
 & \nearrow & & \\
S_0 & & & \\
 & \searrow & & \\
 & & S_1(0) = S_0(1+d) & \text{tn:llä } 1-p
\end{array}
$$

Alkuarvo S_0 on tiedossa. Mitä voit päätellä parametreista u, d ja p, kun osto-optioiden $(S_1 - K)^+$, $K > 0$, hinnat on annettu?

2. Mikä on otaksuma tehokkaista markkinoista? Miten se liittyy martingaaleihin?

3. Tarkastelemme kahden askeleen binomipuuta

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & 40 \\
 & & & \nearrow & \\
 & & 20 & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
10 & & & & 10 \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & 5 & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & 2{,}5
\end{array}
$$

missä $r = 0{,}05$. Laske digitaalioption

$$f(S) \quad = \quad \mathbf{1}_{\{S_2 = 40\}}$$

suojausstrategia ja tasapuolinen hinta.

4. Osoita, että amerikkalaisen ja eurooppalaisen osto-option hinnat ovat samoja (binomimallissa).

5. Johda Black–Scholes-hinnoittelukaava eurooppalaiselle osto-optiolle.