

Rahoitusteoria (3 ov), Loppukoe 18.3. 2003

1. Olkoon $S_0 = 120$, $K = 100$, $y = 1/4$, $a = -1/3$, $r = 1/12$ ja $f(S_2) = S_2 1_{\{S_2 \geq K\}}$. Laske option $f(S_2)$ tasapuolinen hinta c_f .

2. Olkoon $S_0 = 150$, $K = 140$, $y = 2/5$, $a = -1/5$ ja $r = 1/10$. Laske amerikkalaisen option

$$f_k = (K - S_k)^+, k = 0, 1, 2$$

tasapuolinen hinta.

3. Osoita, että strategia $\pi = (\beta_k, \gamma_k)_{k=1}^N$ on omavarainen jos ja vain jos strategian π diskontatulle varallisuudelle \bar{V}^π pätee, että

$$\bar{V}_n^\pi = v + \sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta \bar{S}_k,$$

kun $n \geq 1$.

4. Selosta, kuinka martingaalimitan olemassaolosta seuraa, että hinnoittelumallissa ei voi tehdä arbitraasia omavaraisilla strategiolla.

Rahoitusteoria (5 ov) Loppukoe kesäkuu 2004

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

1. Olkoon $S_0 = 150$, $K = 110$, $y = 2/5$, $a = -1/5$, $r = 1/10$ ja $f(S_2) = \min(K, S_2)$. Laske option $f(S_2)$ tasapuolinen hinta c_f . Näytä että pätee $c_f \leq (1+r)^{-2}K$.
2. Tarkastellaan diskreettiaikaista hinnoittelumallia $(\Omega, F, \mathbb{F}, \underline{S}, \mathbb{P})$. Olkoon $C \geq 0$ jokin rajoitettu vaade. Oletetaan, että C on suojattavissa ja että hinnoittelumalli on arbitraasivapaa. Osoita, että $\mathbb{E}_Q C = \text{vakio}$ kaikilla martingaalimitoilla $Q \in \mathcal{P}$.
3. Tarkastellaan B-S hinnoittelumallia, missä $S_t = S_0 e^{\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}$ ja W on Brownin liike mitan \mathbb{P} suhteen. Mikä on eurooppalaisen option $f_T \doteq S_T 1_{\{K \leq S_T \leq L\}}$ tasapuolinen hinta, kun $r = 0$ ja $L > K > 0$.
[Muistin virkistämiseksi: tässä Black-Scholes hinnoittelumalli tarkoittaa mallia, missä talletuksen B dynamiikka on $dB_t = rB_t dt$, $B_0 = 1$ ja osakkeen S dynamiikka on $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ alkuarvona $S_0 > 0$.]
4. Selosta kuinka Ito-Clark esityslausetta käytetään Black-Scholes- hinnoittelumallin täydellisyyden osoittamiseksi.

Koeaika 4 tuntia.

Rahoitusteoria (5 ov) Loppukoe lokakuu 2004

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

1. Olkoon $S_0 = 150$, $K = 110$, $y = 2/5$, $a = -1/5$, $r = 1/10$ ja $f(S_2) = \min(K, S_2)$. Laske option $f(S_2)$ tasapuolinen hinta c_f . Näytä että pätee $c_f \leq (1+r)^{-2}K$.
2. Tarkastellaan diskreettiaikaista hinnoittelumallia $(\Omega, F, \mathbb{F}, \underline{S}, \mathbb{IP})$. Olkoon $C \geq 0$ jokin rajoitettu vaade. Oletetaan, että C on suojattavissa ja että hinnoittelumalli on arbitraasivapaa. Osoita, että $\mathbb{E}_Q C = \text{vakio}$ kaikilla martingaalimitoilla $Q \in \mathcal{P}$.
3. Tarkastellaan B-S hinnoittelumallia, missä $S_t = S_0 e^{\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}$ ja W on Brownin liike mitan \mathbb{IP} suhteen. Mikä on eurooppalaisen option $f_T \doteq S_T 1_{\{K \leq S_T \leq L\}}$ tasapuolinen hinta, kun $r = 0$ ja $L > K > 0$.
[Muistin virkistämiseksi: tässä Black-Scholes hinnoittelumalli tarkoittaa mallia, missä talletuksen B dynamiikka on $dB_t = rB_t dt$, $B_0 = 1$ ja osakkeen S dynamiikka on $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ alkuarvona $S_0 > 0$.]
4. Selosta kuinka Ito-Clark esityslausetta käytetään Black-Scholes- hinnoittelumallin täydellisyyden osoittamiseksi.

Koeaika 4 tuntia.

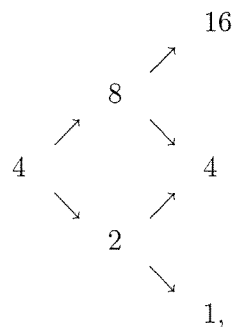
Tehtävissä 1 ja 2 tarkastelemme yhden askeleen yhden osakkeen kolmen tilan mallia, jossa korko $r > 0$ ja

$$\begin{array}{rcl}
 & & S_0(1+u) \quad \text{tn:llä } p \\
 & \nearrow & \\
 S_0 & \rightarrow & S_0(1+m) \quad \text{tn:llä } q \\
 & \searrow & \\
 & & S_0(1+d) \quad \text{tn:llä } 1-(p+q),
 \end{array}$$

missä $d < m < u$.

1. Milloin malli on (a) arbitraasivapaa ja (b) täydellinen? Perustele vastauksesi.
2. Olkoon F digitaaliopio $F(S_1) = \mathbf{1}_{\{S_1=S_0(1+u)\}}$. Laske sen osto- ja myyntihin-
 nat silloin, kun (a) malli on arbitraasivapaa ja (b) kun mallissa on arbitraasia.

Tehtävissä 3 ja 4 tarkastelemme kahden askeleen binomipuuta



missä $r = 0,25$.

3. Laske look-back-option

$$f(S) = \max_{0 \leq t \leq 2} (S_t - 5)^+$$

suojausstrategia.

4. Määrää optimaaliset hetket käyttää amerikkalainen myyntioptio

$$f(S_t) = (5 - S_t)^+.$$

5. Johda Black-Scholes-osittaisdifferentiaaliyhtälö.

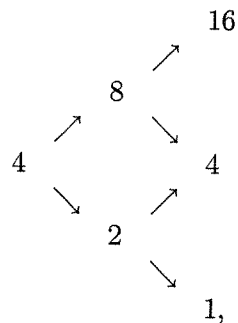
Tehtävissä 1 ja 2 tarkastelemme yhden askeleen yhden osakkeen kolmen tilan mallia, jossa korko $r > 0$ ja

$$\begin{array}{rcl}
 & & S_0(1+u) \quad \text{tn:llä } p \\
 & \nearrow & \\
 S_0 & \rightarrow & S_0(1+m) \quad \text{tn:llä } q \\
 & \searrow & \\
 & & S_0(1+d) \quad \text{tn:llä } 1-(p+q),
 \end{array}$$

missä $d < m < u$.

- Määrittele mallin ekvivalenttien riskineutraalien mittojen joukko.
- Laske myyntioption $(S_0 - S_1)^+$ osto- ja myyntihinnat silloin, kun (a) malli on arbitraasivapaa ja (b) kun mallissa on arbitraasia.
 (Vihje: kohta (b) on kompa.)

Tehtävissä 3 ja 4 tarkastelemme kahden askeleen binomipuuta



missä $r = 0,25$.

- Laske digitaalioption

$$f(S_2) = \mathbf{1}_{\{S_2=16\}}$$

suojausstrategia.

- Määrää optimaaliset hetket käyttää amerikkalainen osto-optio

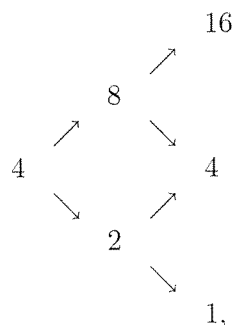
$$f(S_t) = (S_t - 5)^+.$$

- Olkoon $F = f(S_T)$ (rajoitettu) eurooppalainen vaade Black-Scholes-hinnoittelumallissa. Johda sen suojausstrategia $\pi = (\beta_t, \gamma_t)_{t \in [0, T]}$. Et voi olettaa, että korko on nolla.

1. Määrittele seuraavat rahoitusteorian peruskäsitteet:

- (a) arbitraasivapaus,
- (b) täydellisyys,
- (c) otaksuma tehokkaista markkinoista.

2. Tarkastelemme kahden askeleen binomipuuta



missä $r = 0$. Laske look-back-option

$$f(S) = \max_{0 \leq t \leq 2} (S_t - 5)^+$$

suojausstrategia ja tasapuolinen hinta

3. Olkoon $F = f(S_T)$ jokin (yksinkertainen) ehdollinen vaade binomimallissa. Johda kaava (tai algoritmi) sen suojausstrategialle $\pi = (\beta_t, \gamma_t)_{t \leq T}$.

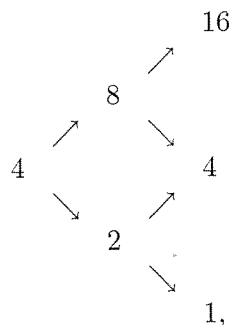
Kaavan, tai algoritmin, parametrit siis ovat f , u , d , r ja T .

4. Olkoon $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ dynaaminen diskreettiaikainen hinnoittelumalli, jolla on ekvivalentti martingaalimitta \mathbf{Q} . Osoita, että $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ arbitraasivapaa.

5. Olkoon $F = f(S_T)$ eurooppalainen vaade Black-Scholes-hinnoittelumallissa. Johda sen kaava sen suojausstrategialle $\pi = (\beta_t, \gamma_t)_{t \in [0, T]}$.

Kaavan, tai algoritmin, parametrit siis ovat f , μ , σ , r ja T .

1. Esitä eurooppalaisen myyntioption hinta vastaavan osto-option, osakkeen hinnan, lunastushinnan ja koron funktiona.
2. Tarkastelemme kahden askeleen binomipuuta



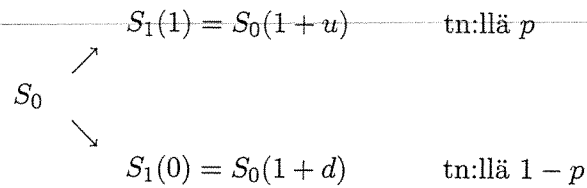
missä $r = 0,25$. Laske “aasialaisen” option

$$f(S) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^2 S_t$$

suojausstrategia ja tasapuolinen hinta.

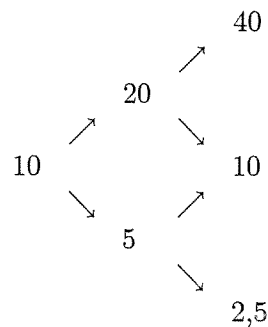
3. Mikä on Snellin peite ja miten se liittyy amerikkalaisten optioiden hinnoitteluun?
Tarkastele kysymystä binomimallissa option kirjoittajan kannalta.
4. Osoita, että (jatkuva- tai diskreettiaikainen) hinnoittelumalli on arbitraasivapaa, jos on olemassa sellainen ekvivalentti mitta \mathbf{Q} , että kaikilla hyväksyttävillä strategioilla π varallisuus V^π on (\mathbf{Q}, \mathbb{F}) -martingaali.
5. Johda Black–Scholes-osittaisdifferentiaaliyhtälö käyttämällä Iton kaavaa.

1. Tarkastelemme keskeistä lelumallia



Alkuarvo S_0 on tiedossa. Mitä voit päätellä parametreista u , d ja p , kun osto-optioiden $(S_1 - K)^+$, $K > 0$, hinnat on annettu?

2. Mikä on otaksuma tehokkaista markkinoista? Miten se liittyy martingaaleihin?
 3. Tarkastelemme kahden askeleen binomipuuta



missä $r = 0,05$. Laske digitaalioption

$$f(S) = \mathbf{1}_{\{S_2=40\}}$$

suojausstrategia ja tasapuolinen hinta.

4. Osoita, että amerikkalaisen ja eurooppalaisen osto-option hinnat ovat samoja (binomimallissa).
 5. Johda Black-Scholes-hinnoittelukaava eurooppalaiselle osto-optiolle.