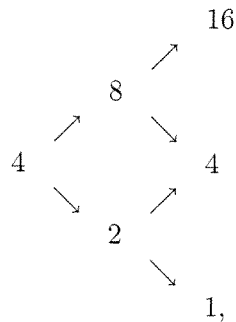


Tehtävissä 1 ja 2 tarkastelemme kahden askeleen binomipuuta



missä  $r = 0,25$ .

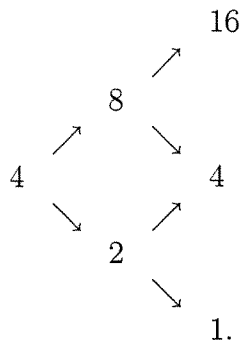
1. Määrää ekvivalentti martingaalimitta ja muotoile sen avulla vaateen  $F$  tasapuo-  
lisen hinnan kaava. (Kaava pitää olla kirjoitettu auki. Toisin sanoen esimerkiksi  
 $(1+r)^{-T} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[F]$  ei kelpaa vastaukseksi.)
2. Laske digitaalioption  $F(\omega) = \mathbf{1}_{\{S_2=4\}}(\omega)$  suojaus. Osakepainojen  $\gamma_t$ ,  $t = 1, 2$ ,  
laskeminen riittää.
3. Diskreettiaikaisella hinnoittelumallilla  $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$  on ennustettava esi-  
tysominaisuus, jos jokainen  $(\mathbf{Q}, \mathbb{F})$ -martingaali  $M$  voidaan esittää muodossa

$$M_t = M_0 + \sum_{s=1}^t \sum_{i=1}^d m_s^i \Delta \bar{R}_s^i,$$

missä  $\bar{R}^i$  on osakkeen  $i$  diskontattu tuotto,  $\mathbf{Q}$  on ekvivalentti martingaalimitta  
ja  $m = (m^1, \dots, m^d)$  on  $\mathbb{F}$ -ennustettava prosessi. Osoita, että ennustettavasta  
esitysominaisuudesta seuraa täydellisyys.

4. Mikä on Black-Scholes-osittaisdifferentiaaliyhtälö ja mitä sillä tehdään?

1. Laske amerikkalaisen osto-option  $(S_t - 4)^+$ ,  $t = 0, 1, 2$ , tasapuolinen hinta *diskontatussa* binomipuussa



Tässä puussa siis  $r = 0$ .

2. Mikä on *Doobin hajotelma* ja miten se liittyy amerikkalaisten optioiden optimaaliseen käyttöön?
3. Johda Black-Scholes-mallissa eurooppalaisen option  $F = f(S_T)$  hintakaava hetkellä  $t$  ja tilalla  $S_t = x$ :

$$v(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(xe^{r(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}y - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy.$$

4. Mikä on *Black-Scholes-osittaisdifferentiaaliyhtälö* ja miten se liittyy eurooppalaisten optioiden hinnoitteluun?