HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos **2. välikoe**
Rahoitusteoria **12.5.2005**

Tehtävissä 1 ja 2 tarkastelemme kahden askeleen binomipuuta

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & 16 \\
 & 8 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 4 \\
 & 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & 1,
\end{tikzcd}
$$

missä $r = 0{,}25$.

1. Määrää ekvivalentti martingaalimitta ja muotoile sen avulla vaateen F tasapuolisen hinnan kaava. (Kaava pitää olla kirjoitettu auki. Toisin sanoen esimerkiksi $(1+r)^{-T}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[F]$ ei kelpaa vastaukseksi.)

2. Laske digitaalioption $F(\omega) = \mathbf{1}_{\{S_2=4\}}(\omega)$ suojaus. Osakepainojen γ_t, $t = 1, 2$, laskeminen riittää.

3. Diskreettiaikaisella hinnoittelumallilla $(B, S, \Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ on ennustettava esitysominaisuus, jos jokainen $(\mathbf{Q}, \mathbb{F})$-martingaali M voidaan esittää muodossa

$$M_t = M_0 + \sum_{s=1}^{t} \sum_{i=1}^{d} m_s^i \, \Delta \bar{R}_s^i,$$

missä $\bar{R}^i$ on osakkeen i diskontattu tuotto, $\mathbf{Q}$ on ekvivalentti martingaalimitta ja $m = (m^1, \ldots, m^d)$ on $\mathbb{F}$-ennustettava prosessi. Osoita, että ennustettavasta esitysominaisuudesta seuraa täydellisyys.

4. Mikä on Black–Scholes-osittaisdifferentiaaliyhtälö ja mitä sillä tehdään?

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos **2. kurssikoe**
Rahoitusteoria **pe 16.12.2005**

1. Laske amerikkalaisen osto-option $(S_t - 4)^+$, $t = 0, 1, 2$, tasapuolinen hinta *diskontatussa* binomipuussa

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & 16 \\
 & 8 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 4 \\
 & 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & 1.
\end{tikzcd}$$

Tässä puussa siis $r = 0$.

2. Mikä on *Doobin hajotelma* ja miten se liittyy amerikkalaisten optioiden optimaaliseen käyttöön?

3. Johda Black–Scholes-mallissa eurooppalaisen option $F = f(S_T)$ hintakaava hetkellä t ja tilalla $S_t = x$:

$$v(t, x) \quad = \quad e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(xe^{r(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\,y-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}}.$$

4. Mikä on *Black–Scholes-osittaisdifferentiaaliyhtälö* ja miten se liittyy eurooppalaisten optioiden hinnoitteluun?