Probability with martingales
LOPPUKOE (11.06.2009)

Valitse **vain** toinen tehtävistä 5 ja 6.

1. Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia satunnaismuuttujia, joille

$$X_n = \begin{cases} n^2 - 1 & \text{todnnäköisyydellä } n^{-2} \\ -1 & \text{todnnäköisyydellä } 1 - n^{-2}. \end{cases}$$

Osoita, että $\mathbf{E}\, X_n = 0$, mutta $\dfrac{X_1 + \ldots X_n}{n} \to -1$ melkein varmasti kun $n \to \infty$.

2. (i) Määrittele satunnaismuuttujaperheen unifominen integroituvuus

(ii) Anna esimerkki ei-negatiivisesta martingaalista $X = (X_n)_{n \geq 0}$, joka ei ole uniformisesti integroituva.

3. (i) Olkoon X tasanjakautunut välille $[-1, 1]$. Laske X:n karakteristinen funktio.

(ii) Osoita, ettei ole olemassa riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia Y_1 ja Y_2 joille $X \sim Y_1 - Y_2$ (tässä $\sim$ tarkoittaa samoinjakautumista).

4. Olkoon $X = (X_n)_{n \geq 0}$, L^2-rajoittunut martingaali filtraation $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots$ suhteen. Hahmottele tarkasti (kuitenkaan kaikkia yksityiskohtia ei tarvitse esittää) miksi on olemassa L^2-integroituva satunnaismuuttuja X_∞, jolle pätee $X_n = \mathbf{E}\,(X_\infty | \mathcal{F}_n)$ kaikilla $n \geq 0$.

5. Mikä on Kolmogorovin 0-1 -laki? Todista se (voit esim. olettaa martingaalien perusteorian tai delta-systeemien ominaisuudet tunnetuiksi).

6. (i) Määrittele pysäytysajan käsite. Jos S ja T ovat pysäytysaikoja, osoita, että $\min(S, T)$ on myös pysäytysaika.

(ii) Olkoon X rajoitettu martingaali ja S pysäytysaika. Todista optionaalinen pysäytys muodossa: $\mathbf{E}\, X_S = \mathbf{E}\, X_0$.