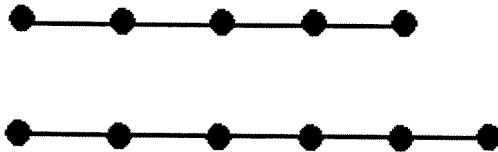


# Peleistä ja malleista

## Loppukoe 25.5.2004

1. Osoita, että pelaajalla I on voittostrategia Ehrenfeucht-Fraïssé pelissä  $EF_3(G, G')$ , kun  $G$  ja  $G'$  ovat seuraavat verkot:

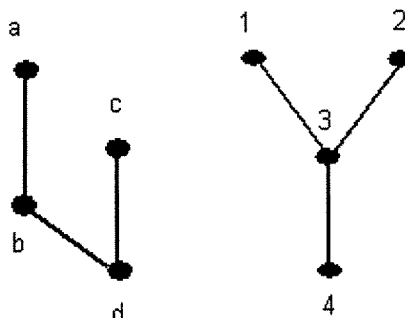


2. Osoita, että ei ole olemassa aakkoston  $L = \{P\}$  (P on yksipaikkainen predikaattisymboli) lausetta  $\varphi$ , jonka kvanttoriaste on korkeintaan 50, siten että mielivaltainen  $L$ -strukturi  $A$  on lauseen  $\varphi$  malli jos ja vain jos kaikki paitsi korkeintaan 55 mallin alkioista ovat  $P$ :ssä.
3. Osoita, että jos  $A \approx_p B$  ja  $A$  ja  $B$  ovat numeroituvia, niin  $A \cong B$ .
4. Olkoon  $f$  funktio joukossa  $A$ . Osoita, että jos  $C$  on niiden numeroituvien joukkojen  $X \subseteq A$  joukko, jotka ovat suljettuja funktion  $f$  suhteen (joukko  $X$  on suljettu funktion  $f$  suhteen jos  $f(a)$  on  $X$ :ssä aina kun  $a$  on  $X$ :ssä), niin pelaajalla II on voittostrategia pelissä  $G_{cub}(C)$ .
5. Esitä pääpiirteissään mallinolemassaolopelin määritelmä. Kerro mitä mallinolemassaololause sanoo ja esitä todistuksen idea.

# Peleistä ja malleista

## Loppukoe 18.5.2004

1. Osoita, että pelaajalla I on voittostrategia Ehrenfeucht-Fraïssé pelissä  $EF_2(G, G')$ , kun  $G$  ja  $G'$  ovat seuraavat verkot:



2. Osoita, että ei ole olemassa aakkoston  $L = \{P\}$  ( $P$  on yksipaikkainen predikaattisymboli) lausetta  $\varphi$  siten että mielivaltainen  $L$ -strukturi  $A$  on lauseen  $\varphi$  malli jos ja vain jos  $|P^A| = |A - P^A|$  (eli  $P$ :ssä on yhtä monta alkioita kuin  $P$ :n komplementissa).
3. Verkkojen  $(V, E_V)$  ja  $(V', E_{V'})$ , missä  $V \cap V' = \emptyset$ , summa  $(V, E_V) + (V', E_{V'}) = (V \cup V', E_{V+V'})$  määritellään ehdolla:  $E_{V+V'} = \{(a, b) : (a, b) \in E_V \text{ tai } (a, b) \in E_{V'}\}$  (eli summaverkossa ei ole mitään uusia reunoja, vain vanhat). Osoita, että jos  $(V, E_V) \equiv_n (W, E_W)$  ja  $(V', E_{V'}) \equiv_n (W', E_{W'})$ , missä  $V \cap V' = \emptyset$  ja  $W \cap W' = \emptyset$ , niin  $(V, E_V) + (V', E_{V'}) \equiv_n (W, E_W) + (W', E_{W'})$ .
4. Osoita, että jos pelaajalla II on voittostrategia pelissä  $G_{cub}(C)$  ja pelissä  $G_{cub}(D)$ , niin hänellä on voittostrategia pelissä  $G_{cub}(C \cap D)$ .
5. Esitä Bethin määriteltävyyslause (Beth Definability Theorem) ja osoita, että se seuraa interpolaatiolauseesta (Interpolation Theorem).