OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
KURSSIKOE 1
3.3.2008

1. Ratkaise seuraava ODY:n alkuarvotehtävä tuntemattomalle funktiolle $u = u(x, y)$:

$$xu_x + u_y = 2y^2 \quad , \quad u(x, 0) = x^2.$$

2. Ovatko seuraavat osittaisdifferentiaaliyhtälöt lineaarisia, semilineaarisia tai kvasilineaarisia (ota kantaa kaikkiin vaihtoehtoihin; $u = u(x, t)$, $x \in \mathbf{R}$, $t > 0$):

a) $u_t = u_{xx} + \sin x$,

b) $u_t = u_{xx} + uu_x + x^2$,

c) $u_t = u^2 + u_x \sin(x)$

3. Esitä funktio $u := u(x, t)$, missä $-\infty < x < \infty$ ja $t \geq 0$, joka toteuttaa yhtälöt

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) &= u_{xx}(x,t) & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= e^{-x^2}, & -\infty < x < \infty, \\ u_t(x,0) &= x^2, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

4. Formuloi lämpöyhtälön alkuarvo–reuna-arvoprobleema kahden muuttujan funktiolle $u = u(x, t)$, missä x on suljetulla välillä $[0, L]$, ja reunafunktiot ovat 0. Esitä (ilman todistuksia) ratkaisukaava Fourier–sarjojen avulla.

OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
KURSSIKOE 1
3.3.2008

1. Ratkaise seuraava ODY:n alkuarvotehtävä tuntemattomalle funktiolle $u = u(x, y)$:

$$xu_x + u_y = 2y^2 \quad , \quad u(x, 0) = x^2.$$

2. Ovatko seuraavat osittaisdifferentiaaliyhtälöt lineaarisia, semilineaarisia tai kvasilineaarisia (ota kantaa kaikkiin vaihtoehtoihin; $u = u(x, t)$, $x \in \mathbf{R}$, $t > 0$):

a) $u_t = u_{xx} + \sin x$,

b) $u_t = u_{xx} + uu_x + x^2$,

c) $u_t = u^2 + u_x \sin(x)$

3. Esitä funktio $u := u(x, t)$, missä $-\infty < x < \infty$ ja $t \geq 0$, joka toteuttaa yhtälöt

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) &= u_{xx}(x,t) & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= e^{-x^2}, & -\infty < x < \infty, \\ u_t(x,0) &= x^2, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

4. Formuloi lämpöyhtälön alkuarvo-reuna-arvoprobleema kahden muuttujan funktiolle $u = u(x, t)$, missä x on suljetulla välillä $[0, L]$, ja reunafunktiot ovat 0. Esitä (ilman todistuksia) ratkaisukaava Fourier-sarjojen avulla.

OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
KEVÄT 2008
KURSSIKOE 2
12.5. klo 13-15 sali B123

1. Osoita, että tapauksessa $\bar{x} := (x, y) \in \mathbf{R}^2$ aaltoyhtälö napakoordinaateissa on

$$v_{tt} = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}, \tag{1}$$

eli jos $u = u(x, y, t)$ toteuttaa aaltoyhtälön, niin funktio $v(r, \theta, t) := u(r\cos\theta, r\sin\theta, t)$ toteuttaa yhtälön (1). Tässä $r > 0$ ja $\theta \in [0, 2\pi]$.

2. Kerro lyhyesti yhdesti yhtenäisen, C^2–reunaisen rajoitetun tasoalueen Greenin funktion määritelmä ja perusominaisuudet. Ei todistuksia.

3. Onko Fredholmin integraaliyhtälöllä

$$\phi(s) - \int_0^\pi \sin(t + s)\phi(t)dt = \sin(2s) \quad , \quad s \in [0, \pi].$$

ratkaisua?

4. Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ rajoitettu yhdesti yhtenäinen alue, $\partial\Omega \in C^2$. Oletetaan, että on annettu funktio $q \in C^1(\bar{\Omega})$, jolle $q(\bar{x}) < 0$ kaikilla $\bar{x} \in \bar{\Omega}$. Tarkastellaan Neumannin probleemaa

$$\Delta u(\bar{x}) + q(\bar{x})u(\bar{x}) = 0, \qquad \text{kun } x \in \Omega,$$

$$\partial_\nu u = f, \qquad \text{joukossa } \partial\Omega,$$

missä f on annettu, Ω reunan ympäristössä jatkuvasti derivoituva funktio. Osoita, että ratkaisu $u \in C^2(\bar{\Omega})$ on yksikäsitteinen, mikäli sellainen on olemassa.

OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
KEVÄT 2008
KURSSIKOE 2
12.5. klo 13-15 sali B123

1. Osoita, että tapauksessa $\bar{x} := (x, y) \in \mathbf{R}^2$ aaltoyhtälö napakoordinaateissa on

$$v_{tt} = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}, \tag{1}$$

eli jos $u = u(x, y, t)$ toteuttaa aaltoyhtälön, niin funktio $v(r, \theta, t) := u(r \cos\theta, r \sin\theta, t)$ toteuttaa yhtälön (1). Tässä $r > 0$ ja $\theta \in [0, 2\pi]$.

2. Kerro lyhyesti yhdesti yhtenäisen, C^2–reunaisen rajoitetun tasoalueen Greenin funktion määritelmä ja perusominaisuudet. Ei todistuksia.

3. Onko Fredholmin integraaliyhtälöllä

$$\phi(s) - \int_0^\pi \sin(t + s)\phi(t)dt = \sin(2s) \quad , \quad s \in [0, \pi].$$

ratkaisua?

4. Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ rajoitettu yhdesti yhtenäinen alue, $\partial\Omega \in C^2$. Oletetaan, että on annettu funktio $q \in C^1(\bar{\Omega})$, jolle $q(\bar{x}) < 0$ kaikilla $\bar{x} \in \bar{\Omega}$. Tarkastellaan Neumannin probleemaa

$$\Delta u(\bar{x}) + q(\bar{x})u(\bar{x}) = 0, \qquad \text{kun } x \in \Omega,$$

$$\partial_\nu u = f, \qquad \text{joukossa } \partial\Omega,$$

missä f on annettu, Ω reunan ympäristössä jatkuvasti derivoituva funktio. Osoita, että ratkaisu $u \in C^2(\bar{\Omega})$ on yksikäsitteinen, mikäli sellainen on olemassa.