OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
ERILLISKOE
KESÄKUU 2008

1. Ratkaise seuraava 1. kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälön alkuarvotehtävä, ja tutki, millä muuttujien arvoilla ratkaisu on olemassa (tässä $u = u(x, y)$):

$$2u_x - u_y = -u \ , \quad u(x, 0) = x.$$

2. Ovatko seuraavat ODY:t lineaarisia, semi– tai kvasilineaarisia (ota kantaa kaikkiin vaihtoehtoihin; $u = u(x, y)$):

$$a) \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10(x + y), \quad b) \ u + 2u_y + 2u_x u_{yy} + x^2 + y^2 = 0$$

$$c) \ u_x + \sin x \ u_y = e^{x^2 u^2}, \quad d) \ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin(x + y),$$

3. Onko Fredholmin integraaliyhtälöllä

$$\phi(s) - \int_0^{\pi} \sin(t + s)\phi(t)dt = \sin(2s) \quad , \qquad s \in [0, \pi].$$

ratkaisua?

4. Olkoon $u = u(x, t)$, missä $x \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$. Ratkaise seuraava aaltoyhtälön Cauchyn probleema:

$$u_{tt} = u_{xx} \quad , \quad x \in \mathbf{R} \ , t > 0,$$

$$u(x, 0) = \sin x \quad , \quad x \in \mathbf{R},$$

$$u_t(x, 0) = \cos x \quad , \quad x \in \mathbf{R},$$

5. Ovatko seuraavat funktiot harmonisia tasossa tai sen jossakin osa–alueessa ($(x, y) \in \mathbf{R}^2$):

a) $\log((x^2 + y^2)^3)$,

b) $\log(x^2 - y^2)$,

c) $y/(x^2 - y^2)$,

d) $\int_0^5 (x^2 - y^2 + t)dt$?

OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
ERILLISKOE
14.8.2008

1. Ratkaise seuraava ODY:n alkuarvotehtävä tuntemattomalle funktiolle $u = u(x, y)$:

$$5u_x - u_y = u^2 \quad , \quad u(x, 0) = e^x.$$

2. Formuloi lämpöyhtälön alkuarvo–reuna-arvoproblcema kahden muuttujan funktiolle $u = u(x, t)$, missä x on suljetulla välillä $[0, L]$, ja reunafunktiot ovat 0. Esitä ratkaisukaava Fourier–sarjojen avulla. (Todistukset eivät ole tarpeen.)

3. Ratkaise tehtävän 2 ongelma, kun $L = \pi$ ja alkuarvo on $\phi(x) = x(\pi - x)$.

4. Tarkastellaan aaltoyhtälön alkuarvo–reuna–arvoprobleemaa tuntemattomalle funktiolle $u := u(x, t)$, kun paikkamuuttuja x on suljetulla välillä $[0, L]$:

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad 0 < x < L, t > 0,$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \qquad t \geq 0$$
$$u(x, 0) = \phi_0(x), \qquad 0 \leq x \leq L,$$
$$u_t(x, 0) = \phi_1(x), \qquad 0 \leq x \leq L,$$

missä funktiot $\phi_j \in C^3([0, L])$ ovat annettuja, ja $\phi_j(0) = \phi_j(L) = 0$ ja $\phi_0''(0) = \phi_0''(L) = 0$. Oletetaan, että tehtävällä on olemassa klassinen, kaksi kertaa sekä x:n että t:n suhteen jatkuvasti derivoituva ratkaisu. Todista ratkaisun yksikäsitteisyys käyttämällä luennolla esitettyä energiaintegraalia.

5. Ratkaise seuraava ODY:n alkuarvotehtävä tuntemattomalle funktiolle $u = u(x, y)$:

$$2xu_x + 3u_y = y^2 \quad , \quad u(x, 0) = x^2.$$

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Loppukoe, 11.6.2009

Kevään kurssilla mukana olleilta neljä ensimmäistä tehtävää arvostellaan välikokeena, ja kaikki viisi tehtävää loppukokeena. Kurssin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan. Muilla koe arvostellaan kaikkien viiden tehtävän perusteella tavallisena loppukokeena.

1. Mitä tarkoittaa säännöllinen Strum–Liouville ongelma? Olkoon

$$L = -\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$$

   säännölliseen Strum–Liouville ongelmaan liittyvä differentiaali operaattori välillä $[0, L]$. Osoita, että se on symmetrinen L^2–sisätulon suhteen sopivien reunaehtojen vallitessa välin päätepisteissä.

2. (Laskareista) Olkoon Ω tasoalue, ja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ yhtälön

$$\Delta u(x) + a(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) = 0,\ x \in \Omega,$$

   ratkaisu. Oletetaan, että kaikilla x pätee $c(x) < 0$. Osoita, että jos $u|_{\partial\Omega} = 0$, niin $u = 0$ koko alueessa Ω.

3. Muotoile ja todista Keskiarvoperiaate tasoalueen harmonisille funktioille.

4. Ratkaise Cauchy–ongelma

$$u_{tt} - \Delta_x u = t,\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0,$$

$$u(x, 0) = -\frac{1}{6}x_1^3,\ u_t(x, 0) = 2 + |x|^2.$$

5. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = (\pi - x)^2 \sin^2(2x), \quad 0 < x < \pi.$$