Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Osittaisdifferentiaaliyhtälöt
Loppukoe
16.3.2004

1. Muodosta yleinen ratkaisu yhtälölle

$$2xu_x + 4yu_y + (xz + yz)u_z = 0.$$

2. Saata yhtälö

$$xu_x + u_y - 3u = 3$$

kanoniseen muotoon ja ratkaise se.

3. Toisen kertaluvun lineaaristen osittaisdifferentiaaliyhtälöiden luokittelu $\mathbb{R}^2$:ssa. Osoita erityisesti, että luokittelu ei riipu koordinaatistosta. Tarkastele esimerkkinä yhtälöä

$$xyu_{xx} + 2x^2u_{xy} + xu_{yy} - xu_x + yu_y + x^2yu = 1 + x.$$

4. Anna esimerkki funktiosta u, joka on harmoninen avaruudessa $\mathbb{R}^4$ ja saa vain positiivisia arvoja. Mikä yhteinen piirre on kaikilla tällaisilla funktioilla?

5. Ratkaise yksiulotteinen reuna–arvotehtävä

$$\begin{aligned} &u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad 0 < x < L, \ 0 < t < T \\ &u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad 0 \le t \le T \\ &u(x,0) = u(x,T) = 0, \quad 0 \le x \le L \end{aligned}$$

käyttäen yritettä $u(x,t) = f(x) \cdot g(t)$. Onko tehtävä hyvin asetettu?

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt
elokuu 2004

1. Mitä tarkoittaa maksimiperiaate harmonisille funktioille?

2. Olkoon D tason yksikkökiekko $\{z \in \mathbf{C};\ |z| < 1\}$ ja $\Omega = D \setminus \{0\}$. Osoita että ongelmalla
$$\Delta u(z) = 1, \quad z \in \Omega,$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0,$$
ei ole C^2–ratkaisua.

3. Olkoon Ω kuten edellisessä tehtävässä. Määrää ongelman
$$\Delta u = 1 \quad \text{alueessa } \Omega,$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0,$$
yksikäsitteinen heikko $H_0^1(\Omega)$ ratkaisu. Miksi tämä ei ole vahva ratkaisu?

4. Ratkaise alkuarvo–ongelma
$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, \quad x \in \mathbf{R},\ y > 0,$$
$$u(x,0) = 0,\ \partial_y u(x,0) = \frac{\sin(nx)}{n}, x \in \mathbf{R}.$$
Vihje: Kirjoita u sopivien analyyttisten funktioiden reali– ja imaginääriosien avulla.

5. Ratkaise alkuarvo–ongelma
$$\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0, \quad x \in \mathbf{R},\ y > 0,$$
$$u(x,0) = 0,\ \partial_y u(x,0) = \frac{\sin(nx)}{n}, x \in \mathbf{R}.$$
Huomaa merkkiero edelliseen tehtävään. Tutki mitä ratkaisulle tapahtuu kun $n \to \infty$. Miten tämä eroaa edellisen tehtävän käytöksestä?

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Osittaisdifferentiaaliyhtälöt
Loppukoe
16.12.2004

1. Muodosta funktion $V = (x, y, z)$ integraalipinta, joka sisältää käyrän

$$C : x = y + 1, \quad x = y^2, \quad y > 0.$$

2. Saata yhtälö

$$u_x - 2xyu_y = \frac{2}{u}$$

kanoniseen muotoon ja ratkaise se.

3. Määritä kaikki koko avaruudessa $\mathbb{R}^5$ määritellyt harmoniset funktiot u, joille pätee

$$\frac{1}{1 + \|x\|} \leq u(x) \leq \|x\| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^5.$$

4. a) Mitä tarkoitetaan Hugyensin periaatteella?
b) Miksi puheviestintä on helpompaa avaruudessa $\mathbb{R}^3$ kuin avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^4$?

5. Esitä ja todista lämpöyhtälön alku–reuna–arvotehtävää koskeva maksimi–minimiperiaate yksiulotteisessa tapauksessa.

ODY loppukoe
21.3.05

1. Muodosta seuraavien vektorifunktioiden integraalikäyrät

a) $(z, -x, 0)$

b) $(x(y+z), y, 2z)$

2. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$2y u_x + u_y = 3x,$$
$$u(x,0) = x^3.$$

3. a) Selitä mitä tarkoitetaan keskiarvoperiaatteella ja anna esimerkki funktiosta, joka noudattaa sitä.

b) Osoita, että jokainen alueen $\Omega \subset \mathbb{R}^{10}$ harmoninen funktio noudattaa tätä keskiarvoperiaatetta.

4. Ratkaise yksiulotteisen aaltoyhtälön alku-reuna-arvotehtävä

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0$$
$$u(x,0) = \sin x, \quad 0 < x < \pi$$
$$u_t(x,0) = \sin 2x, \quad 0 < x < \pi$$

5. Esitä ja todista lämpöyhtälön alku-reuna-arvotehtävää koskeva maksimi-minimiperiaate yksiulotteisessa tapauksessa.

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Koe 06.03.2007

1. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = x^2, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Olkoon $\Omega = (a,b) \times (0,T)$, $T > 0$. Kuinka määritellään suorakaiteen Ω lämpöreuna $\partial'\Omega$? Oletetaan edelleen, että $u \in C^2(\overline{\Omega})$ toteuttaa

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} < 0, \quad (x,t) \in \Omega.$$

Osoita, että

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial'\Omega} u.$$

3. Olkoon $\Omega = (0,l) \times \mathbb{R}_+$, $v \in C^2(\overline{\Omega})$ ja oletetaan että kaikilla $(x,t) \in \Omega$ pätee

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = 0,$$

ja että alkuarvoille on voimassa

$$v(x,0) = 0, \quad \partial v(x,0)\partial t = 0, \quad 0 < x < l.$$

Osoita, että $v = 0$.

4. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \sin x + \sin^2 x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

5. Oletetaan, että $u \in C^2(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ on rajoitettu, eli jollain positiivisella vakiolla M pätee

$$|u(x,t)| \leq M, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

Oletetaan lisäksi, että u toteuttaa lämpöyhtälön

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,$$

ja hetkellä $t = 0$ pätee $u(x,0) \geq 0$, $u(0,0)) > 0$ ja että funktio $x \mapsto u(x,0)$ häviää kompaktin joukon ulkopuolella. Osoita, että $u(x,t) > 0$ kaikilla $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Koe 12.4.2007

1. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = x^2, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Etsi kaikki yhtälön

$$\frac{1}{h}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = i\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

muotoa $u(x,t) = X(x)T(t)$ olevat ratkaisut, joille

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t > 0.$$

Tässä h on positiivinen vakio.

3. (Laskareista) Ratkaise alku–arvo–ongelma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

Vihje: Etsi aluksi sopiva ajasta rippumaton ratkaisu differentiaaliyhtälölle.

4. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \sin^2 x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t > 0.$$

5. Olkoon $\Omega = (a, b) \times (0, T)$, $T > 0$. Muotoile maksimiperiaate onglman

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \leq 0, \quad (x,t) \in \Omega.$$

ratkaisuille, ja anna todistus siinä erikoistapauksessa että yllä pätee aito epäyhtälö.

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt/ Partial Differential Equations

Koe 14.06.2007

1. Ratkaise alkuarvo–ongelma/ Solve the initial value problem

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \sin(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Etsi kaikki yhtälön

$$\frac{1}{h}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + i\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

muotoa $u(x,t) = X(x)T(t)$ olevat ratkaisut, joille

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t > 0.$$

Tässä h on positiivinen vakio.

Find all solutions of

$$\frac{1}{h}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + i\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

of the form $u(x,t) = X(x)T(t)$ for which

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t > 0.$$

Here $h > 0$ is a constant.

3. Oletetaan että $u \in C^2([0,1] \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ toteuttaa yhtälön/ Assume that $u \in C^2([0,1] \times \overline{\mathbb{R}}_+$ satifises

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+,$$

$$u(x,0) = 0,\ 0 < x < 1,\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t > 0.$$

Osoita, että $u = 0$/ Show that $u = 0$.

4. Olkoon $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, rajoitettu C^2–alue, ja $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ongelman

$$(\Delta + \lambda)u(x) = 0, \;\; x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \;\; x \in \partial\Omega,$$

ratkaisu. Oletetaan, että $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$ on vakio. Osoita, että $u = 0$.

Let $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ be a bounded C^2–domain, and assume that $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solves

$$(\Delta + \lambda)u(x) = 0, \;\; x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \;\; x \in \partial\Omega,$$

Assume that $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$ is constant. Show that $u = 0$.

5. Konstruoi (Dirichlet) Greenin funktio Laplace–operaattorille Δ yksikköpallossa $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^3;\; \|x\| < 1\}$.

Construct a (Dirichlet's) Green's function for the Laplace–operator Δ in the unit ball $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^3;\; \|x\| < 1\}$ of $\mathbb{R}^3$.