Matematiikan laitos
Operaattoriteoria
Loppukoe 25.5. 2004

Ratkaise viisi (5) tehtävää seuraavista vaihtoehdoista.

1. Olkoon $C^1(0,1)$ sellaisten funktioiden $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ muodostama Banach avaruus, joille derivaatta f' on jatkuva funktio välillä $[0,1]$, normina $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Edellä $\|\cdot\|_\infty$ on avaruuden $C(0,1)$ sup-normi. Ovatko seuraavat operaattorit kompakteja $C^1(0,1) \to C(0,1)$:

(i) $J(f) = f$ kun $f \in C^1(0,1)$? (ii) $D(f) = f'$ kun $f \in C^1(0,1)$?

[*Vihje.* Esimerkiksi Ascoli-Arzelan kriteeri avaruuden $C(0,1)$ kompaktisuudelle auttaa.]

2. (*teoria*) Olkoon E kompleksinen Banach avaruus ja $S \in L(E)$ rajoitettu operaattori. Määrittele spektri $\sigma(S)$ ja esitä spektraalisädekaavan sisältöä (ei tarvitse todistaa). Osoita: $\sigma(S)$ on suljettu joukko, ja

$$\sigma(S) \subset \{z \in \mathbf{C} : |z| \le \|S\|\}.$$

3. Olkoon H kompleksinen Hilbert avaruus. Määrittele itse-adjungoitu sekä normaali operattori $S \in L(H)$. Olkoot (x_n) ja (y_n) avaruuden H ortonormaaleja jonoja, ja (c_n) rajoitettu kompleksilukujono. Olkoon $S \in L(H)$ operaattori

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x|x_n) y_n, \quad x \in H.$$

Onko S normaali? Onko S itse-adjungoitu?

4. (*teoria*) Esitä normaalin, kompaktin operaattorin $S \in K(H)$ *spektraalilause.* [Älä todista sitä.] Johda spektraalilauseesta lähtien normaalin $S \in K(H)$ *polaarihajotelma* $S = U|S|$, missä $|S| = (S^*S)^{1/2}$. Kerro lyhyesti miten $|S|$ konstruoidaan.

5. (*teoria*) Esitä ja todista Banach avaruuden E heikkoa topologiaa w koskeva *Mazurin lause.* [Sopiva versio Hahn-Banachin lauseesta oletetaan tunnetuksi.]

6. Olkoon E Banach avaruus ja $(x_n^*) \subset E^*$ annettu jono. Määrittele, mitä tarkoitetaan jonon (x_n^*) heikolla suppenemisella ja heikko*-suppenemisella kohti $x^* \in E^*$. Olkoon $f_n = (1, \dots, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^\infty$ (n ykköstä) kun $n \in \mathbf{N}$, ja $\mathbf{1} = (1, 1, 1, \dots)$. Suppeneeko

(i) $f_n \xrightarrow{w^*} \mathbf{1}$ avaruudessa ℓ^∞ kun $n \to \infty$? (ii) $f_n \xrightarrow{w} \mathbf{1}$ avaruudessa ℓ^∞ kun $n \to \infty$?

Dualiteetti $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ pidetään tunnettuna. [*Vihje.* Kohdassa (ii) Mazurin lauseesta voi olla apua.]