Matematiikan laitos
Numeerinen analyysi
Loppukoe
9.8.2006

1. Tutki häiriöalttiuden avulla seuraavien ongelmien stabiilisuutta
   a) $f(x) = \frac{x}{\log x}$, $x \approx 1$, $x \neq 1$,

   b) $f(x) = \frac{\sin z}{x}$, $x \approx 0$, $x \neq 0$.

2. Osoita, että yhtälöllä $x - e^{-x} = 1$ on täsmälleen yksi juuri. Määrää tämän jälkeen juuren arvo neljän desimaalin tarkkuudella. Selosta käyttämäsi menetelmä.

3. Funktion $f(x)$ derivaattaa $f'(x)$ approksimoidaan differenssilausekkeella $D_h f(x)$, jolla on virhekaava
$$D_h f(x) - f'(x) = c_1 h^2 + c_2 h^4 + O(h^6).$$
   Muodosta kaavan perusteella differenssilauseke, joka approksimoi derivaattaa $f'(x)$ kertalukua $O(h^6)$ olevalla kaavalla.

4. a) Olkoon $f(x) = x^3 + x + 1$ ja $x_k = k$, $k = 1, 2, \ldots, 6$. Muodosta jaettujen erotusten taulukko.
   b) Olkoon f astetta n oleva polynomi ja $(x_k)_1^{n+1}$ erillisiä pisteitä. Tietyillä arvoilla m on $f[x_1, \ldots, x_{m+1}] = 0$. Kuinka korkea voi m olla, että näin kävisi? Perustele vastauksesi.

5. a) Johda puolisuunnikassääntö $T_n(f)$ tasaväliselle jaolle.
   b) Olkoon $f \in C^2[a, b]$ ja $\sup |f''(x)| \leq M$. Osoita, että jos $n \in \mathbb{Z}_+$, $h = \frac{b-a}{n}$ ja $x_i = a + (i-1)h$, niin
$$|I(f) - T_n(f)| \leq \frac{1}{12}(b-a)Mh^2.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Numeerinen analyysi
Loppukoe
9.8.2007

Huom. Tenttijä saa käyttää laskinta ja luentomateriaalia.

1. Polynomin $p(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ eräs nollakohta on likimain 0.

(a) Anna virhearvio tälle likiarvolle.

(b) Tarkenna likiarvoa Newtonin keinolla. Pari iterointia riittää. Anna virhearvio myös tälle likiarvolle. Laskimen tekemiä pyöristysvirheitä ei oteta huomioon.

2.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 10^5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10^5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Laske matriisin A häiriöalttius normin $\| * \|_1$ suhteen.

Ratkaise Gaussin eliminointikeinolla yhtälö $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ laskemalla liukuluvuissa $F_k(10, 4)$ (neljä numeroa, katkaisupyöristys)

(b) käyttämättä skaalattua tuentaa,

(c) käyttämällä sitä. Mistä johtuu b- ja c-kohtien tulosten ero? Kumpi tulos on luotettavampi?

3. Sovita funktiotyyppi $f(x) = ae^x + be^{-x}$, $a, b \in \mathbf{R}$, tavallisella pienimmän neliösumman keinolla pisteistöön

x	-2	0	1	2
$f(x)$	7.2	0	-2.4	-7.2

4. Laske integraali $I = \int_0^1 \exp(-x^2)\,dx$ puolisuunnikaskaavalla käyttäen 17 tasavälistä pistettä. Paranna tulosta Rombergin menetelmällä (käyttäen samoja pisteitä).

5. (a) Ratkaise Eulerin menetelmällä alkuarvotehtävä

$$y' = y + xy^2, \quad y(0) = 1/2,$$

pisteessä $x = 0.4$. Käytä askelpituutta 0.1.

(b) Käytä a-kohtaa arvioidaksesi, mihin väliin ratkaisufunktion y arvot (melko) varmasti asettuvat, kun $x \in [0, 0.4]$. Arvioi tämän perusteella virhettä $|y(0.4) - y_4|$, missä y_4 on Eulerin keinolla saamasi ratkaisun likiarvo.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Numeerinen analyysi
Loppukoe
23.10.2007

Huom. Tenttijä saa käyttää laskinta ja luentomateriaalia.

1. Yhtälöllä $e^{-x} - x^7 + 1 = 0$ on tasan yksi reaalijuuri. Laske se vähimmäistarkkuudella 10^{-5}. Saavutettu tarkkuus on perusteltava (laskimen tekemiä pyöristysvirheitä ei oteta huomioon).

2. Laske tridiagonaalimatriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 \end{bmatrix}$$

kolmiohajotetelma $A = LU$, missä L on alakolmiomatriisi ja U on yläkolmiomatriisi.

3. (a) Laske pisteistöön

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	0	0

liittyvä, korkeintaan astetta kolme oleva interpoloiva polynomi p_3. Arvioi sen avulla $f(1/2)$.

(b) Laske samaan pisteistöön liittyvän luonnollisen kuutiollisen splinin s väliä $[0,1]$ koskeva polynomi $s|[0,1]$. Arvioi sen avulla $f(1/2)$.

4. Laske epäoleellinen integraali

$$I = \int_0^2 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}\, dx$$

tilanteeseen sopivalla, muutamaa pistettä käyttävällä integroimiskeinolla.

Ohje. Välin päätepiste 0 ei voi olla solmupiste.

5. Ratkaise Heunin menetelmällä alkuarvotehtävä

$$y' = 1 - y/x, \quad y(2) = 2,$$

pisteessä $x = 3$. Käytä askelpituutta 0.2.

Ohje. Tee laskutaulukko huolellisesti.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Numeerinen analyysi
Loppukoe
14.8.2008

Huom. Tenttijä saa käyttää laskinta ja luentomateriaalia.

1. Yhtälöllä $e^{-x} - x^7 + 1 = 0$ on tasan yksi reaalijuuri. Laske se vähimmäistarkkuudella 10^{-5}. Saavutettu tarkkuus on perusteltava (laskimen tekemiä pyöristysvirheitä ei oteta huomioon).

2. Laske tridiagonaalimatriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 \end{bmatrix}$$

kolmiohajotetelma $A = LU$, missä L on alakolmiomatriisi ja U on yläkolmiomatriisi.

3. (a) Laske pisteistöön

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	0	0

liittyvä, korkeintaan astetta kolme oleva interpoloiva polynomi p_3. Arvioi sen avulla $f(1/2)$.

(b) Laske samaan pisteistöön liittyvän luonnollisen kuutiollisen splinin s väliä $[0, 1]$ koskeva polynomi $s|[0, 1]$. Arvioi sen avulla $f(1/2)$.

4. Laske epäoleellinen integraali

$$I = \int_0^2 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}\, dx$$

tilanteeseen sopivalla, muutamaa pistettä käyttävällä integroimiskeinolla.

Ohje. Välin päätepiste 0 ei voi olla solmupiste.

5. Ratkaise Heunin menetelmällä alkuarvotehtävä

$$y' = 1 - y/x, \quad y(2) = 2,$$

pisteessä $x = 3$. Käytä askelpituutta 0.2.

Ohje. Tee laskutaulukko huolellisesti.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Numeerinen analyysi
Loppukoe
21.10.2008

Huom. Tenttijä saa käyttää laskinta ja luentomateriaalia.

1. Onko funktion

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

arvon laskeminen pisteessä $x_0 \approx 1$, $x_0 \neq 1$, stabiili vai häiriöaltis ongelma suhteellisen virheen mielessä?

2. Polynomin $p(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ eräs nollakohta on likimain 0.

(a) Anna virhearvio tälle nollakohdan likiarvolle.

(b) Tarkenna likiarvoa Newtonin keinolla. Pari iterointia riittää. Anna virhearvio myös tälle likiarvolle. Laskimen tekemiä pyöristysvirheitä ei oteta huomioon.

3. Laske pisteistöön

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	-1	2	0

liittyvän luonnollisen kuutiollisen splinin s väliin $[0,1]$ kuuluva polynomi $s|[0,1]$. Arvioi sen avulla $f(1/2)$.

4. Laske kolmea pistettä käyttävällä Gaussin-Tsebysevin menetelmällä integraali

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cot x}\, dx.$$

Miksi esimerkiksi Simpsonin kaavaa ei voi käyttää?

5. Ratkaise Heunin menetelmällä alkuarvotehtävä

$$y' = 1 - y/x, \quad y(2) = 2,$$

pisteessä $x = 3$. Käytä askelpituutta 0.2.

Ohje. Tee laskutaulukko huolellisesti.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Numeerinen analyysi
Loppukoe
17.12.2008

Huom. Tenttijä saa käyttää laskinta ja luentomateriaalia.

1. Onko funktion

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

arvon laskeminen pisteessä $x_0 \approx 0$, $x_0 \neq 0$, stabiili vai häiriöaltis ongelma suhteellisen virheen mielessä?

2. (a) Osoita, että funktiolla $f(x) = x - \cos x$ on tasan yksi reaalinen nollakohta.

(b) Laske se vähimmäistarkkuudella 10^{-4}. Perustele ratkaisusi tarkkuus.

Huom. Muista käyttää radiaaneja laskimessasi!

3. Sovita funktiotyyppi $f(x) = ae^x + be^{-x}$, $a, b \in \mathbf{R}$, tavallisella pienimmän neliösumman keinolla pisteistöön

x	-2	0	1	2
$f(x)$	7.2	0	-2.4	-7.2

4. Laske integraali $I = \int_0^1 \exp(-x^2)\,dx$ puolisuunnikaskaavalla käyttäen 17 tasavälistä pistettä. Paranna tulosta Rombergin menetelmällä (käyttäen samoja pisteitä).

5. Laske Heunin menetelmällä alkuarvotehtävän

$$y' = 1 - 2xy, \quad y(0) = 0,$$

ratkaisun y arvo pisteessä $x = 1$. Käytä askelpituutta 0.25.

Ohje. Tee laskutaulukko huolellisesti.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Numeerinen analyysi
Loppukoe
22.1.2009

Huom. Tenttijä saa käyttää laskinta ja luentomateriaalia.

1. Yhtälöllä $e^x + 1 - 3e^{-2x} = 0$ on tasan yksi reaalijuuri. Laske se vähimmäistarkkuudella 10^{-5}. Saavutettu tarkkuus on perusteltava.

2. Laske tridiagonaalimatriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

kolmiohajotetelma $A = LU$, missä L on alakolmiomatriisi ja U on yläkolmiomatriisi.

3. Laske pisteistöön

x	-2	-1	1	3
$f(x)$	5	1	3	-1

liittyvä, korkeintaan astetta kolme oleva interpoloiva polynomi p_3. Arvioi sen avulla $f(0)$.

4. Laske integraali

$$I = \int_0^2 \sqrt{x} \cos x \, dx$$

numeerisesti Rombergin keinolla käyttäen yhdeksää tasavälistä pistettä.

5. Ratkaise Eulerin keinolla alkuarvotehtävä

$$y' = y + xy^4, \quad y(0) = -1,$$

pisteessä $x = 0.4$. Käytä askelpituutta 0.1.