NORMIALGEBRAT (5 OP / 2,5 OV) 20.12.2006, KESTO 4 H

1. Olkoon A Banachin algebra, jossa on ykkösalkio 1. Olkoon $a \in A$ ja $\rho(a)$ a:n spektraalisäde. Todista:

(a) Jos $a \in A$ ja $\rho(a) < 1$, niin $1 - a \in \mathrm{Inv}(A)$ (eli $1 - a$ on kääntyvä).

(b) Inv(A) on A:n avoin osajoukko.

2. (a) Olkoon A algebra (yli skalaarikunnan $\mathbf{C}$). Miten määritellään A:n alkion x spektri $\mathrm{Sp}_A(x)$?

(b) Olkoon S kompakti topologinen avaruus ja $A = C(S)$ (eli S:ssä määriteltyjen jatkuvien kompleksifunktioiden algebra). Osoita, että $\mathrm{Sp}_A(f) = \{\, f(x) \mid x \in S \,\}$ kaikilla $f \in A$.

(c) Olkoon A sellaisten jatkuvien funktioiden $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ algebra (pisteittäisten laskutoimitusten suhteen), joille $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Olkoon $f(x) = e^{-x^2}$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Mikä on $\mathrm{Sp}_A(f)$?

3. Olkoon A kommutatiivinen Banachin algebra. Mitä tarkoitetaan A:n modulaari-ideaalilla ja A:n maksimaalimodulaari-ideaalilla? Mitä tarkoitetaan A:n karakterilla? Olkoon $\mathcal{M}$ A:n maksimaalimodulaari-ideaalien joukko ja $\Delta(A)$ A:n karakterien joukko. Osoita, että jokaisen $\phi \in \Delta(A)$ ydin $\ker(\phi) \in \mathcal{M}$, ja kuvaus $\phi \mapsto \ker(\phi)$ on bijektio $\Delta(A)$:lta $\mathcal{M}$:lle.

4. Oletetaan, että $S \neq \emptyset$ on puoliryhmä laskutoimituksen $(x, y) \mapsto xy$ suhteen, ts. $(xy)z = x(yz)$ kaikilla x, y, $z \in S$. Merkitsemme

$$l^1(S) = \{f : S \to \mathbf{C} \mid \sum_{x \in S} |f(x)| < \infty\}.$$

(a) Miten määritellään $l^1(S)$:n normi $\|\cdot\|_1$? Osoita, että $l^1(S)$ on Banachin avaruus tämän normin suhteen.

(b) Osoita, että avaruudessa $l^1(S)$ on yksi ja vain yksi Banachin algebran kertolasku $(f, g) \mapsto f * g$, jolle pätee $\chi_{\{x\}} * \chi_{\{y\}} = \chi_{\{xy\}}$ kaikilla x, $y \in S$.

(c) Oletetaan, että S on kommutatiivinen, jolloin myös $l^1(S)$ on kommutatiivinen. Miten Banachin algebran $l^1(S)$ spektri voidaan karakterisoida S:n semikarakterien avulla? (Tämän tuloksen todistusta ei tarvitse esittää, mutta selitä myös kyseeseen tulevat topologiat.)

5. (a) Olkoon A ykkösalkiolla varustettu kommutatiivinen C^*-algebra ja $x \in A$ itseadjungoitu. Osoita, että jokaiselle A:n karakterille ϕ on $\phi(x) \in \mathbf{R}$.

(b) Olkoon x C^*-algebran A normaali alkio. Osoita, että $\|x^2\| = \|x\|^2$, ja x:n spektraalisäteelle pätee $\rho(x) = \|x\|$.

NORMIALGEBRAT (5 OP / 2,5 OV) 25.1.2007, KESTO 4 H

1. Olkoon A normialgebra ja $a \in A$.

(a) Miten määritellään a:n spektraalisäde $\rho(a)$?

(b) Osoita, että $\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

2. Olkoon A kommutatiivinen Banachin algebra.

(a) Mitä tarkoitetaan A:n modulaari-ideaalilla ja A:n maksimaalimodulaari-ideaalilla?

(b) Todista: Ideaali $\mathcal{I} \subset A$ on modulaari-ideaali, jos ja vain jos on olemassa ns. *modulaariykkönen* modulo $\mathcal{I}$, ts. alkio $u \in A$, jolle $ux - x \in \mathcal{I}$ kaikilla $x \in A$.

(c) Osoita, että jokainen modulaari-ideaali $\mathcal{I} \neq A$ sisältyy johonkin maksimaalimodulaari-ideaaliin.

3. Oletetaan, että $S \neq \emptyset$ on puoliryhmä laskutoimituksen $(x, y) \mapsto xy$ suhteen, ts. $(xy)z = x(yz)$ kaikilla x, y, $z \in S$. Merkitsemme

$$l^1(S) = \{f : S \to \mathbf{C} \mid \sum_{x\in S} |f(x)| < \infty\}.$$

(a) Miten määritellään $l^1(S)$:n normi $\|\cdot\|_1$? Osoita, että $l^1(S)$ on Banachin avaruus tämän normin suhteen.

(b) Osoita, että avaruudessa $l^1(S)$ on yksi ja vain yksi Banachin algebran kertolasku $(f, g) \mapsto f * g$, jolle pätee $\chi_{\{x\}} * \chi_{\{y\}} = \chi_{\{xy\}}$ kaikilla x, $y \in S$.

(c) Oletetaan, että S on kommutatiivinen, jolloin myös $l^1(S)$ on kommutatiivinen. Miten Banachin algebran $l^1(S)$ spektri voidaan karakterisoida S:n semikarakterien avulla? (Tämän tuloksen todistusta ei tarvitse esittää, mutta selitä myös kyseeseen tulevat topologiat.)

4. Olkoon A C^*-algebra ilman ykkösalkiota ja $\tilde{A} = A \oplus \mathbf{C}$ tavalliseen tapaan määritelty *-algebra. Osoita, että $\tilde{A}$:ssa on normi, jonka suhteen se on C^*-algebra.

5. Esitä ja todista Gelfandin-Naimarkin lause kommutatiivisille C^*-algebroille. Selitä todistuksessa tarvittavien aputulosten sisältö ilman todistuksia.