MONIULOTTEISET AIKASARJAT, 8–10 OP (aine- tai maisteriopinnot). Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 7–11. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Yleistentti 8.8.2007

Vastaa neljään kysymykseen. Merkitse selkeästi, mitkä vastaukset tulee arvostella! Kukin tehtävä on kuuden pisteen arvoinen. Palauta kysymyspaperi ja oheismateriaali.

1.

a) Satunnaismuuttaja Y noudattaa t-jakaumaa n:llä vapausasteella (merkitään $Y \sim t(n)$), jos $Y \doteq Z/(\sqrt{X/n})$, jossa $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$, $X \sim \chi^2(n)$ ja Z ja X ovat toisistaan riippumattomia. Todista asymptoottisen teorian avulla, että $Y \xrightarrow{L} Z$ eli että $t(n) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \mathsf{N}(0,1)$. Perustele todistuksesi vaiheet sopivilla lauseilla.

b) Satunnaismuuttaja Y noudattaa F-jakaumaa vapausasteilla m ja n (merkitään $F(m,n)$), jos $Y \doteq (X_1/m)/(X_2/n)$, jossa $X_1 \sim \chi^2(m)$, $X_2 \sim \chi^2(n)$ ja X_1 ja X_2 ovat toisistaan riippumattomia. Todista asymptoottisen teorian avulla, että $Y \xrightarrow{L} X_1/m$ eli että $F(m,n) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \chi^2(m)/m$. Perustele todistuksesi vaiheet sopivilla lauseilla.

2. Tutkitaan lineaarista regressiomallia

$$y_t = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_t + u_t,$$

jossa $\boldsymbol{\beta}$ on kiinteä $k \times 1$ -parametrivektori mutta $k \times 1$ -selittäjävektori $\mathbf{x}_t$ on stokastinen. Oletetaan lisäksi, että u_t noudattaa 1. asteen AR-prosessia siten että $\mathbf{u}|\mathbf{X} \sim \mathsf{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{V}(\rho))$, jossa $\mathbf{u}' = [\, u_1 \ldots u_T \,]$, ρ on AR-kerroin, $|\rho| < 1$ ja $\mathbf{V}(\rho)$ on positiivisesti definiitti matriisi.

a) Voidaanko malli estimoida mielekkäästi tavallisella PNS:llä? Perustele.

b) Selitä pääpiirteissään, miten mallin parametrit ($\boldsymbol{\beta}$ ja ρ) voidaan (mahdollisesti PNS:n lisäksi) estimoida, ja minkälaisia ominaisuuksia kuvaamillasi estimaattoreilla on. (Jos haluat, voit tehdä lisäoletuksia mallista. Kohdasta voi saada täydet pisteet vaikkei tekisi lisäoletuksia.)

3. Noudattakoon n-ulotteinen aikasarja $\mathbf{y}_t$ VMA(q)-prosessia

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\Psi}_1\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Psi}_q\boldsymbol{\varepsilon}_{t-q},$$

jossa innovaatiovektorille pätee $\mathsf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$, $\mathsf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t') = \boldsymbol{\Omega}$ ja $\mathsf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_\tau') = \mathbf{0}$, kun $t \neq \tau$ ja muut merkinnät ovat ilmeiset.

a) Määrittele prosessille j. autokovarianssimatriisi $\mathbf{\Gamma}_j$. Miten autokovarianssit viipeillä j ja $-j$ liittyvät toisiinsa? Perustele ja tulkitse tulos sanoin.

b) Johda tehtävän prosessille autokovarianssimatriisit kaikille j. arvoille ($j = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$).

4. Tutkittavat aikasarjat ovat Suomen ja Ruotsin bruttokansantuotteen volyymien asukasta kohden logaritmien differenssit (Δs_t ja Δr_t) vuosina 1953-2003 ($T = 51$). Oheisissa kuvioissa esitetään differenssien lisäksi myös niitä vastaavat tasomuuttujat (volyymit). Oletetaan, että vektoriaikasarja $[\Delta s_t \quad \Delta r_t]'$ noudattaa stationaarista VAR(2)-prosessia, jonka innovaatiovektori noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa tavanomaisin oletuksin.

Alla on tunnuslukuja PNS-regressiosta, jossa Δs_t:tä on selitetty Δs_t:n ja Δr_t:n kahdella viipeellä ja vakiolla:

$$\begin{array}{lllllllll}\Delta s_t = & & & & & & & & \\ 0,018 & + & 0.44\Delta s_{t-1} & + & 0,28\Delta r_{t-1} & - & 0.29\Delta s_{t-2} & + & 0.04\Delta r_{t-2} \\ (2,76) & & (2.35) & & (0,95) & & (-1,60) & & (0.14) \\ & + & \hat{\varepsilon}_{st}(1), & & & & & & \end{array} \tag{1}$$

$$\mathsf{R}_s^2(1) = 0,28, \ \hat{\sigma}_{ss}(1) = 0.000614.$$

Yllä suluissa olevat luvut ovat regressiokertoimien t-arvoja, R_s^2 on selitysosuus, $\hat{\sigma}_{ss}$ on innovaation varianssin SU-estimaattori ja "1" viittaa regression numeroon. Toinen regressio on muuten samanlainen, mutta siinä on selitettävänä Δr_t:

$$\begin{array}{lllllllll}\Delta r_t = & & & & & & & & \\ 0,014 & + & 0,11\Delta s_{t-1} & + & 0.40\Delta r_{t-1} & + & 0.07\Delta s_{t-2} & - & 0,24\Delta r_{t-2} \\ (3.37) & & (0.87) & & (2.06) & & (0.56) & & (-1.29) \\ & + & \hat{\varepsilon}_{rt}(2), & & & & & & \end{array} \tag{2}$$

$$\mathsf{R}_r^2(2) = 0.24, \ \hat{\sigma}_{rr}(2) = 0,000266.$$

Yllä merkinnät ovat kuten edellä. SU-estimaattori innovaatioiden kovarianssille on $\hat{\sigma}_{rs}(1\&2) = 0.000285$ (otoskorrelaatio on 0.69). Myös seuraavat regressiot ja tunnusluvut on laskettu:

$$\begin{array}{lllllllll}\Delta s_t & = & 0.020 & + & 0.57\Delta s_{t-1} & - & 0.26\Delta s_{t-2} & + & \hat{\varepsilon}_{st}(3). \\ & & (3.60) & & (4.15) & & (-1.91) & & \end{array} \tag{3}$$

$$\mathsf{R}_s^2(3) = 0.26,\ \hat{\sigma}_{ss}(3) = 0.000628.$$

$$\Delta r_t = \underset{(3.51)}{0.015} + \underset{(3.64)}{0.52\Delta r_{t-1}} - \underset{(-1.09)}{0.16\Delta r_{t-2}} + \hat{\varepsilon}_{rt}(4), \tag{4}$$

$$\mathsf{R}_r^2(4) = 0.22,\ \hat{\sigma}_{rr}(4) = 0.000274$$

ja

$$\Delta r_t = \underset{(3.36)}{0.013} + \underset{(3.52)}{0.45\Delta r_{t-1}} + \hat{\varepsilon}_{rt}(5), \tag{5}$$

$$\mathsf{R}_r^2(5) = 0.20,\ \hat{\sigma}_{rr}(5) = 0.000281.$$

Mallien (3) ja (5) innovaatioiden kovarianssin SU-estimaattori on $\hat{\sigma}_{rs}(3\&5) = 0.000278$ (otoskorrelaatio on 0.65).

a) Miten mallien (1) ja (2) PNS-estimaatit liittyvät VAR(2)-prosessin parametrien SU-estimaatteihin? Perustele lyhyesti. (1,5 p)

b) Laske testisuureet nollahypoteeseille, että Δr_t ei ole Granger-kausaalinen Δs_t:n suhteen ja päinvastoin malleihin (1)–(4) perustuen. Selitä, mihin jakaumiin laskemiasi testisuureita tulee verrata. Testaa nollahypoteeseja 5 prosentin riskitasolla. Mitä päättelet? (3 p)

c) Tutkija päätyy (edellisen kohdan perusteella tai riippumatta siitä) pitämään VAR(2)-prosessia sellaisena, jossa Δs_t riippuu vain kahdesta omasta viipeestään ja Δr_t vain yhdestä omasta viipeestään. Hän on jo estimoinut tällaiset mallit (3) ja (5) PNS:llä. Ovatko mallien (3) ja (5) PNS-estimaatit tällöin myös SU-estimaatteja? Jos eivät, niin liittyvätkö ne mitenkään SU-estimaatteihin? Perustele lyhyesti. (1,5 p)

d) Saat lisäpisteen, jos osaat testata mallien (1) ja (2) tulosten avulla Geweken testisuureella nollahypoteesia, että Δs_t ja Δr_t olisivat lineaarisesti täysin riippumattomia toisistaan. Käytä 5 prosentin riskitasoa.

5.

a) Noudattakoon n-ulotteinen aikasarja $\mathbf{y}_t$ VAR(p)-prosessia

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c} + \mathbf{\Phi}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{\Phi}_2\mathbf{y}_{t-2} + \cdots + \mathbf{\Phi}_p\mathbf{y}_{t-p} + \varepsilon_t,$$

jossa innovaatiovektorille pätee $\mathsf{E}(\varepsilon_t) = \mathbf{0}$, $\mathsf{E}(\varepsilon_t\varepsilon_t') = \mathbf{\Omega}$ ja $\mathsf{E}(\varepsilon_t\varepsilon_\tau') = \mathbf{0}$, kun $t \neq \tau$ ja muut merkinnät ovat ilmeiset. Mikä on stationaarisuusehto prosessille? Olkoon VAR(2)-prosessi mallien (3) ja (5) mukainen. Laske stationaarisuusehto tässä tilanteessa mahdollisimman pitkälle.

b) Olkoon VAR(2)-prosessi mallien (3) ja (5) mukainen. Laske Δs_t:n ja Δr_t:n odotusarvo yleisiä VAR(p)-prosessien tuloksia käyttäen.

6. Selitä VAR-mallien impulssivasteanalyysi pääpiirteissään. Minkälaisia riippuvuusrakenteita analyysi olettaa? Mitä ongelmia analyysiin liittyy?

Aputuloksia

Y noudattaa $\chi^2(n)$-jakaumaa, jos $Y = X_1^2 + \cdots + X_n^2$, jossa X_i ja X_j $(i \neq j)$ ovat riippumattomia ja noudattavat standardinormaalijakaumaa.

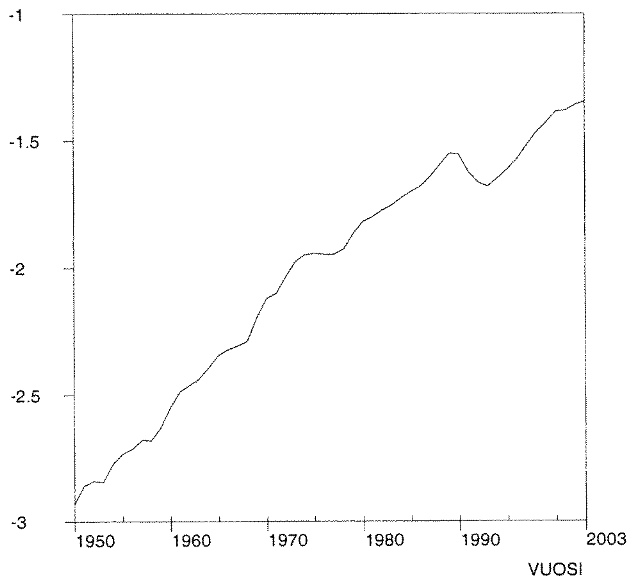
Toisen asteen polynomin

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

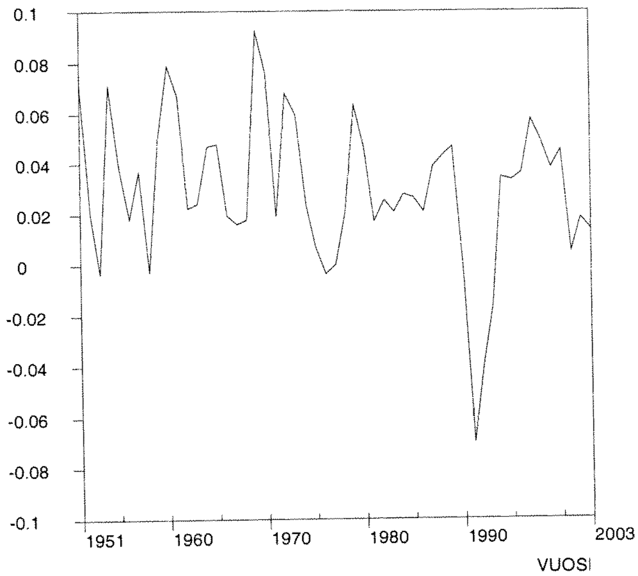
juurten (x_1, x_2) ratkaisukaava on

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

BKT/asukas Suomessa, volyymi-indeksin logaritmi, 1950-2003



BKT/asukas Suomessa, volyymi-indeksin logaritmin muutos, 1951-2003



MONIULOTTEISET AIKASARJAT, 10 OP. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 7–11. Kuulustelija: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Yleistentti 13.5.2008

Vastaa kolmeen kysymykseen. Kukin tehtävä on kuuden pisteen arvoinen. Palauta kysymykset.

1.
Noudattakoon aikasarja y_t AR(p)-prosessia

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

jossa polynomin $1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p = 0$ juuret sijaitsevat kompleksitasoon piirretyn yksikköympyrän ulkopuolella, $\varepsilon_t \sim \mathsf{IID}(0, \sigma^2)$ ja $\mathsf{E}(\varepsilon_t^4) < \infty$. Hahmottele pääpiirteissään parametrien c, $\phi_1, \ldots, \phi_p$ PNS-estimaattorien asymptoottisen jakauman johto.

2.
a) Satunnaismuuttaja Y noudattaa t-jakaumaa n:llä vapausasteella (merkitään $Y \sim t(n)$), jos $Y \doteq Z/(\sqrt{X/n})$, jossa $Z \sim \mathsf{N}(0, 1)$, $X \sim \chi^2(n)$ ja Z ja X ovat toisistaan riippumattomia. Todista asymptoottisen teorian avulla, että $Y \xrightarrow{L} Z$ eli että $t(n) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \mathsf{N}(0, 1)$. Perustele todistuksesi vaiheet sopivilla lauseilla.

b) Satunnaismuuttaja Y noudattaa F-jakaumaa vapausasteilla m ja n (merkitään $F(m, n)$), jos $Y \doteq (X_1/m)/(X_2/n)$, jossa $X_1 \sim \chi^2(m)$, $X_2 \sim \chi^2(n)$ ja X_1 ja X_2 ovat toisistaan riippumattomia. Todista asymptoottisen teorian avulla, että $Y \xrightarrow{L} X_1/m$ eli että $F(m, n) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \chi^2(m)/m$. Perustele todistuksesi vaiheet sopivilla lauseilla.

3. Noudattakoon n-ulotteinen aikasarja $\mathbf{y}_t$ VMA(q)-prosessia

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Psi}_q \boldsymbol{\varepsilon}_{t-q},$$

jossa innovaatiovektorille pätee $\mathsf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$, $\mathsf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t') = \boldsymbol{\Omega}$ ja $\mathsf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_\tau') = \mathbf{0}$, kun $t \neq \tau$ ja muut merkinnät ovat ilmeiset.

a) Määrittele prosessille j. autokovarianssimatriisi $\boldsymbol{\Gamma}_j$. Miten autokovarianssit viipeillä j ja $-j$ liittyvät toisiinsa? Perustele ja tulkitse tulos sanoin.

b) Johda tehtävän prosessille autokovarianssimatriisit kaikille j. arvoille ($j = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$).

4. Tutkitaan Ruotsin ja Tanskan logaritmoituja bruttokansantuotteita henkeä kohden (y_t^{TA} ja y_t^{RU}) vuosina 1870–1913 (ns:n kultakannan aika). VAR(1)-malli (estimoitu yhtälöittäin pienimmän neliösumman menetelmällä PNS) vaikuttaa kelpoiselta:

$$\begin{bmatrix} y_t^{TA} \\ y_t^{RU} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,21 \\ -0,36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,81 & 0,03 \\ 0,62 & 0,43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1}^{TA} \\ y_{t-1}^{RU} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_t^{TA} \\ \hat{\varepsilon}_t^{RU} \end{bmatrix}$$

(ilmeisin merkinnöin).[3] Olkoon vektoriaikasarjaa $[y_t^{TA}\ y_t^{RU}]'$ tuottava prosessi täsmälleen estimoidun eli yhtälön (1) mukainen.

a) Onko prosessi stationaarinen (voit ajatella, että prosessi on "elänyt" äärettömän kauan)?

b) Oleta, että prosessi on stationaarinen (älä välitä, onko oletus realistinen vai ei). Laske y_t^{TA}:n ja y_t^{RU}:n odotusarvo yleisiä VAR(p)-prosessien tuloksia käyttäen.

5. Selitä VAR-mallien impulssivasteanalyysi pääpiirteissään. Minkälaisia riippuvuusrakenteita analyysi olettaa? Mitä ongelmia analyysiin liittyy?

[3] Valtiot. yo. Terhi Luoman käsikirjoitus (19.11.2006) pro gradu -tutkielmaksi (Itämeren alueen Pohjoismaiden ja Iso-Britannian talouksien suhde kultakannan aikana ja toisen maailmansodan jälkeen). Valtiot. yo. Luoman mukaan mallin jäännökset ovat autokorreloimattomia, homoskedastisia ja noudattavat multinormaalijakaumaa.

Aputulos1: Y noudattaa $\chi^2(n)$-jakaumaa, jos $Y = X_1^2 + \cdots + X_n^2$, jossa X_i ja X_j $(i \neq j)$ ovat riippumattomia ja noudattavat standardinormaalijakaumaa.

Aputulos2: Toisen asteen polynomin

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

juuret (x_1, x_2) ovat

$$x_1,\, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Aputulos3:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^{-1} \times \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

MONIULOTTEISET AIKASARJAT, 10 OP. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 7–11. Kuulustelija: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Yleistentti 20.5.2008

Vastaa kolmeen kysymykseen. Kukin tehtävä on kuuden pisteen arvoinen. Palauta kysymykset.

1.

Noudattakoon aikasarja y_t AR(p)-prosessia

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

jossa polynomin $1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p = 0$ juuret sijaitsevat kompleksitasoon piirretyn yksikköympyrän ulkopuolella, $\varepsilon_t \sim \mathsf{IID}(0, \sigma^2)$ ja $\mathsf{E}(\varepsilon_t^4) < \infty$. Hahmottele pääpiirteissään parametrien c, $\phi_1, \ldots, \phi_p$ PNS-estimaattorien asymptoottisen jakauman johto.

2.

a) Satunnaismuuttaja Y noudattaa t-jakaumaa n:llä vapausasteella (merkitään $Y \sim t(n)$), jos $Y \doteq Z/(\sqrt{X/n})$, jossa $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$, $X \sim \chi^2(n)$ ja Z ja X ovat toisistaan riippumattomia. Todista asymptoottisen teorian avulla, että $Y \xrightarrow{L} Z$ eli että $t(n) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \mathsf{N}(0,1)$. Perustele todistuksesi vaiheet sopivilla lauseilla.

b) Satunnaismuuttaja Y noudattaa F-jakaumaa vapausasteilla m ja n (merkitään $F(m,n)$), jos $Y \doteq (X_1/m)/(X_2/n)$, jossa $X_1 \sim \chi^2(m)$, $X_2 \sim \chi^2(n)$ ja X_1 ja X_2 ovat toisistaan riippumattomia. Todista asymptoottisen teorian avulla, että $Y \xrightarrow{L} X_1/m$ eli että $F(m,n) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \chi^2(m)/m$. Perustele todistuksesi vaiheet sopivilla lauseilla.

3. Noudattakoon n-ulotteinen aikasarja $\mathbf{y}_t$ VMA(q)-prosessia

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Psi}_q \boldsymbol{\varepsilon}_{t-q},$$

jossa innovaatiovektorille pätee $\mathsf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$, $\mathsf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t') = \boldsymbol{\Omega}$ ja $\mathsf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_\tau') = \mathbf{0}$, kun $t \neq \tau$ ja muut merkinnät ovat ilmeiset.

a) Määrittele prosessille j. autokovarianssimatriisi $\boldsymbol{\Gamma}_j$. Miten autokovarianssit viipeillä j ja $-j$ liittyvät toisiinsa? Perustele ja tulkitse tulos sanoin.

b) Johda tehtävän prosessille autokovarianssimatriisit kaikille j. arvoille ($j = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$).

4. Tutkitaan Ruotsin ja Tanskan logaritmoituja bruttokansantuotteita henkeä kohden (y_t^{TA} ja y_t^{RU}) vuosina 1870–1913 (ns:n kultakannan aika). VAR(1)-malli (estimoitu yhtälöittäin pienimmän neliösumman menetelmällä PNS) vaikuttaa kelpoiselta:

$$\begin{bmatrix} y_t^{TA} \\ y_t^{RU} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,21 \\ -0,36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,81 & 0,03 \\ 0,62 & 0,43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1}^{TA} \\ y_{t-1}^{RU} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_t^{TA} \\ \hat{\varepsilon}_t^{RU} \end{bmatrix}$$

(ilmeisin merkinnöin).[3] Olkoon vektoriaikasarjaa $[y_t^{TA} \; y_t^{RU}]'$ tuottava prosessi täsmälleen estimoidun eli yhtälön (1) mukainen.

a) Onko prosessi stationaarinen (voit ajatella, että prosessi on "elänyt" äärettömän kauan)?

b) Oleta, että prosessi on stationaarinen (älä välitä, onko oletus realistinen vai ei). Laske y_t^{TA}:n ja y_t^{RU}:n odotusarvo yleisiä VAR(p)-prosessien tuloksia käyttäen.

5. Selitä VAR-mallien impulssivasteanalyysi pääpiirteissään. Minkälaisia riippuvuusrakenteita analyysi olettaa? Mitä ongelmia analyysiin liittyy?

[3] Valtiot. yo. Terhi Luoman käsikirjoitus (19.11.2006) pro gradu -tutkielmaksi (Itämeren alueen Pohjoismaiden ja Iso-Britannian talouksien suhde kultakannan aikana ja toisen maailmansodan jälkeen). Valtiot. yo. Luoman mukaan mallin jäännökset ovat autokorreloimattomia, homoskedastisia ja noudattavat multinormaalijakaumaa.

MONIULOTTEISET AIKASARJAT, syventävät opinnot, 10 OP. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 7–11. Kuulustelija: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Yleistentti 2.4.2009

Vastaa kolmeen kysymykseen. Merkitse selkeästi, mitkä vastaukset tulee arvostella! Kukin tehtävä on kuuden pisteen arvoinen. Palauta kysymykset.

1. Noudattakoon aikasarja y_t AR(p)-prosessia

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

jossa polynomin $1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p = 0$ juuret sijaitsevat kompleksitasoon piirretyn yksikköympyrän ulkopuolella, $\varepsilon_t \sim \mathsf{IID}(0, \sigma^2)$ ja $\mathsf{E}(\varepsilon_t^4) < \infty$. Hahmottele pääpiirteissään parametrien c, $\phi_1, \ldots, \phi_p$ PNS-estimaattorien asymptoottisen jakauman johto.

2. Noudattakoon n-ulotteinen aikasarja $\mathbf{y}_t$ VMA(q)-prosessia

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Psi}_q \boldsymbol{\varepsilon}_{t-q},$$

jossa innovaatiovektorille pätee $\mathsf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$, $\mathsf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t') = \boldsymbol{\Omega}$ ja $\mathsf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_\tau') = \mathbf{0}$, kun $t \neq \tau$ ja muut merkinnät ovat ilmeiset.

a) Määrittele prosessille j. autokovarianssimatriisi $\boldsymbol{\Gamma}_j$. Miten autokovarianssit viipeillä j ja $-j$ liittyvät toisiinsa? Perustele ja tulkitse tulos sanoin.

b) Johda tehtävän prosessille autokovarianssimatriisit kaikille j. arvoille ($j = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$).

3. Tutkitaan Ruotsin ja Tanskan logaritmoituja bruttokansantuotteita henkeä kohden (y_t^{TA} ja y_t^{RU}) vuosina 1870–1913 (ns:n kultakannan aika). VAR(1)-malli (estimoitu yhtälöittäin pienimmän neliösumman menetelmällä PNS) vaikuttaa kelpoiselta:

$$\begin{bmatrix} y_t^{TA} \\ y_t^{RU} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,21 \\ -0,36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,81 & 0,03 \\ 0,62 & 0,43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1}^{TA} \\ y_{t-1}^{RU} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_t^{TA} \\ \hat{\varepsilon}_t^{RU} \end{bmatrix}$$

(ilmeisin merkinnöin).[1] Olkoon vektoriaikasarjaa $[y_t^{TA} \; y_t^{RU}]'$ tuottava prosessi täsmälleen estimoidun eli yhtälön (1) mukainen.

a) Onko prosessi stationaarinen (voit ajatella, että prosessi on "elänyt" äärettömän kauan)?

b) Oleta, että prosessi on stationaarinen (älä välitä, onko oletus realistinen vai ei). Laske y_t^{TA}:n ja y_t^{RU}:n odotusarvo yleisiä VAR(p)-prosessien tuloksia käyttäen.

[1] Valtiot. yo. Terhi Luoman käsikirjoitus (19.11.2006) pro gradu -tutkielmaksi (Itämeren alueen Pohjoismaiden ja Iso-Britannian talouksien suhde kultakannan aikana ja toisen maailmansodan jälkeen). Valtiot. yo. Luoman mukaan mallin jäännökset ovat autokorreloimattomia, homoskedastisia ja noudattavat multinormaalijakaumaa.

4. Selitä VAR-mallien impulssivasteanalyysi pääpiirteissään. Minkälaisia riippuvuusrakenteita analyysi olettaa? Mitä ongelmia analyysiin liittyy?

Aputulos1: Toisen asteen polynomin

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

juuret (x_1, x_2) ovat

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Aputulos2:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^{-1} \times \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$