Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Loppukoe
16.12.2004

1. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja $f : X \to Y$ Hölder-jatkuva eksponentilla α, ts. α on positiivinen reaaliluku ja on olemassa positiivinen reaaliluku L siten, että

$$d(f(x), f(y)) \leq (Ld(x,y))^{\alpha} \text{ kaikilla } x, y \in X.$$

Osoita, että kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla s ja kaikilla $A \subset X$ on

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(A)) \leq L^s \mathcal{H}^s(A).$$

2. Anna esimerkki jonosta Radonin mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä, jotka ovat singulaarisia Lebesguen mitan suhteen, mutta suppenevat heikosti sitä kohti.

3. Osoita, että separoituvassa metrisessä avaruudessa kahden metrisen ulkomitan tuloulkomitta on myös metrinen.

4. Määrittele merkkimitta sekä sen ylä- ja alavariaatiot. Selitä lyhyesti ilman kaikkia yksityiskohtia, miten merkkimitta voidaan esittää kahden mitan (eli ei-negatiivisen merkkimitan) erotuksena.

5. Osoita, että analyyttisen joukon kuva ja alkuva jatkuvassa kuvauksessa (täydellisten separoituvien metristen avaruuksien välillä) on analyyttinen.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Loppukoe
20.1.2005

1. Määrittele Hausdorffin mitta $\mathcal{H}^s$ metrisessä avaruudessa X. Osoita, että jokaiselle $A \subset X$ on korkeintaan yksi luku s, jolle $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$.

2. Olkoon (μ_i) jono $\mathbb{R}^n$:n Radonin mittoja, joka suppenee heikosti kohti Radonin mittaa μ. Osoita, että $\lim \mu_i(A) = \mu(A)$ jokaiselle $\mathbb{R}^n$:n Borelin joukolle A, jonka reunan μ-mitta on 0.

3. Todista lause: metrisessä avaruudessa Borelin joukot ovat mitallisia jokaisen metrisen ulkomitan suhteen.

4. Määrittele merkkimitta sekä sen ylä- ja alavariaatiot. Selitä lyhyesti ilman kaikkia yksityiskohtia, miten merkkimitta voidaan esittää kahden mitan (eli ei-negatiivisen merkkimitan) erotuksena.

5. Osoita, että analyyttisen joukon kuva ja alkuva jatkuvassa kuvauksessa (täydellisten separoituvien metristen avaruuksien välillä) on analyyttinen.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Loppukoe
21.3.2005

1. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja $f : X \to Y$ Hölder-jatkuva eksponentilla α, ts. α on positiivinen reaaliluku ja on olemassa positiivinen reaaliluku L siten, että

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x,y) \text{ kaikilla } x, y \in X$$

Osoita, että kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla s ja kaikilla $A \subset X$ on

$$\mathcal{H}^{\alpha s}(f(A)) \leq L^{\alpha s}\mathcal{H}^{s}(A).$$

2. Määrittele mittojen heikko konvergenssi. Anna esimerkki heikosti suppenevasta Radonin mittojen jonosta (μ_i) $\mathbb{R}^n$:ssä, jolle on olemassa avoin joukko U siten, että jonolla $(\mu_i(U))$ ei ole raja-arvoa, ei edes raja-arvoa ääretön.

3. Määrittele metrinen ulkomitta. Todista, että Hausdorffin ulkomitat ovat metrisiä.

4. Määritellään $\mathbb{R}$:n Borelin joukoille B,

$$\sigma(B) = \int_B (1+x^2)^{-1} \sin x dx + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i i^{-2} \chi_B(i),$$

missä χ_B on B:n karakteristinen funktio. Osoita, että σ on merkkimitta ja määritä sen ylä- ja alavariaatiot.

5. Osoita, että analyyttisen joukon kuva ja alkuva jatkuvassa kuvauksessa (täydellisten separoituvien metristen avaruuksien välillä) on analyyttinen.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Loppukoe
20.12.2005

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus.

(a) Määrittele metrisen ulkomitan käsite.

(b) Olkoon $\tilde{\mu}$ metrinen ulkomitta X:ssä, $A \subset X$ ja G avoin joukko siten, että $A \subset G$. Merkitään

$$A_k = \{x \in A\colon \operatorname{dist}(x, G^c) \geq 1/k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Osoita, että $\tilde{\mu}(A) = \lim_{k\to\infty} \tilde{\mu}(A_k)$.

(c) Osoita, että metrinen ulkomitta $\tilde{\mu}$ on Borel-ulkomitta eli jokainen X:n Borel-joukko on $\tilde{\mu}$-mitallinen.

2. Olkoon X separoituva metrinen avaruus ja $K \subset X$. Oletetaan, että on olemassa sellainen X:n ulkomitta μ, että $\mu(K) > 0$ ja

$$\mu(U) \leq c_0 d(U)^s$$

kaikilla $U \subset X$, joilla $d(U) \leq \delta_0$, missä $c_0 > 0$, $s > 0$ ja $\delta_0 > 0$ ovat vakioita. Osoita, että tällöin $\dim_{\mathcal{H}}(K) \geq s$.

3. Olkoon (μ_k) jono $\mathbb{R}^n$:n Radon-mittoja, joka suppenee heikosti kohti Radon-mittaa μ. Osoita, että

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k(A) = \mu(A)$$

pätee rajoitetulle Borel-joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$, jos $\mu(\partial A) = 0$.

4. (a) Kerro lyhyesti, mitä ovat itsesimilaarit fraktaalit, mitä tarkoittaa avoimen joukon ehto ja miten se liittyy ko. fraktaalien Hausdorff-dimension määräämiseen.

(b) Olkoot $\mathbb{R}^n$:n similariteetit ψ_j, $j = 1, \ldots, k$, aitoja kontraktioita ja $F = \cup_{j=1}^k \psi_j F$ vastaava kompakti invariantti joukko. Osoita, että avoimen joukon ehto toteutuu, jos joukot $\psi_j(F)$ ovat erillisiä.

5. Olkoon $(X, \mathcal{M})$ on mitallinen avaruus ja $\mu\colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$ merkkimitta. Oletetaan, että (P, P^c) ja (D, D^c) ovat μ:n Hahnin hajotelmia.

(a) Osoita: Jos $A \in \mathcal{M}$ ja $A \subset (D \setminus P) \cup (P \setminus D)$, niin $\mu(A) = 0$.

(b) Osoita: Jos $A \in \mathcal{M}$ ja $A \subset (D^c \setminus P^c) \cup (P^c \setminus D^c)$, niin $\mu(A) = 0$.

(c) Osoita, että $\mu(A \cap D) = \mu(A \cap P)$ ja $\mu(A \cap D^c) = \mu(A \cap P^c)$ kaikilla $A \in \mathcal{M}$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Loppukoe
26.1.2006

1. Olkoon (X, d) separoituva metrinen avaruus ja $A_k \subset X$, $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että

$$\dim_{\mathcal{H}}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \dim_{\mathcal{H}}(A_k).$$

2. (a) Määrittele Radon-mittojen heikko suppeneminen $\mathbb{R}^n$:ssä.
(b) Olkoot μ, μ_k, $k \in \mathbb{N}$, Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä siten, että $\mu_k \rightharpoonup \mu$. Osoita, että

$$\liminf_{k\to\infty} \mu_k(V) \geq \mu(V),$$

jos $V \subset \mathbb{R}^n$ on avoin.

3. Olkoon X metrinen avaruus ja $A, B \subset X$ epätyhjiä X:n osajoukkoja. Määrittele A:n ja B:n välinen *Hausdorff-etäisyys* $d_H(A, B)$. Osoita, että

$$d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$$

kaikilla $A, B, C \subset X$.

4. Olkoot $\mathbb{R}^n$:n similariteetit $\psi_j, j = 1, \ldots, k$, aitoja kontraktioita ja olkoon F vastaava invariantti joukko. Oletetaan, että $x_0 \in F$ ja $x \in F$. Osoita, että

$$x = \lim_{i\to\infty} \psi_{j_1} \circ \psi_{j_2} \circ \cdots \circ \psi_{j_i}(x_0),$$

sopivalla (x:stä riippuvalla) jonolla similariteettien ψ_j iteraatioita.

5. Olkoot μ ja ν Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä s.e. $\mu \perp \nu$. Osoita, että
(a) $D_\nu\mu(x) = +\infty$ μ-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$ ja
(b) $D_\nu\mu(x) = 0$ ν-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Loppukoe
3.4.2006

1. Olkoon X topologinen avaruus, $\tilde{\mu}$ Borel-säännöllinen ulkomitta X:ssä ja $A \subset X$ $\tilde{\mu}$-mitallinen s.e. $\mu(A) < \infty$. Osoita, että $\tilde{\mu}\llcorner A$ on Borel-säännöllinen. [Tässä $\tilde{\mu}\llcorner A$ on ulkomitta, joka määritellään kaavalla $(\tilde{\mu}\llcorner A)(B) = \tilde{\mu}(A \cap B)$.]

2. Olkoon $G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [0,1]\}$ funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ kuvaaja. Oletetaan, että f on Hölder-jatkuva eksponentilla $\alpha \in (0,1]$, ts.

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

kaikilla $x, y \in [0,1]$. Osoita, että $1 \leq \dim_{\mathcal{H}} G_f \leq 2 - \alpha$.

[Vihje: Jos $I \subset [0,1]$ on väli, jonka pituus on $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, niin arvioi kuinka montaa neliötä $I \times [\frac{s}{n}, \frac{s+1}{n}]$, $s \in \mathbb{N}$, voi f:n kuvaaja korkeintaan leikata.]

3. Olkoon (μ_k) jono $\mathbb{R}^n$:n Radon-mittoja, joka suppenee heikosti kohti Radon-mittaa μ. Osoita, että

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k(A) = \mu(A)$$

pätee rajoitetulle Borel-joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$, jos $\mu(\partial A) = 0$.

4. (a) Kerro lyhyesti, mitä ovat itsesimilaarit fraktaalit, mitä tarkoittaa avoimen joukon ehto ja miten se liittyy ko. fraktaalien Hausdorff-dimension määräämiseen.

(b) Olkoot $\mathbb{R}^n$:n similariteetit ψ_j, $j = 1, \ldots, k$, aitoja kontraktioita ja $F = \cup_{j=1}^k \psi_j F$ vastaava kompakti invariantti joukko. Osoita, että avoimen joukon ehto toteutuu, jos joukot $\psi_j(F)$ ovat erillisiä.

5. Olkoot μ ja ν Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Borel-joukko ja $0 < t < \infty$. Todista:

(a) Jos $\overline{D}_\nu \mu(x) \geq t$ kaikilla $x \in A$, niin $\mu(A) \geq t\nu(A)$.

(b) Jos $\underline{D}_\nu \mu(x) \leq t$ kaikilla $x \in A$, niin $\mu(A) \leq t\nu(A)$.

[Vitalin peitelause $\mathbb{R}^n$:n Radon-mitoille oletetaan tunnetuksi.]

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Loppukoe
14.6.2006

1. Olkoon X topologinen avaruus, $\tilde{\mu}$ Borel-säännöllinen ulkomitta X:ssä ja $A \subset X$ $\tilde{\mu}$-mitallinen s.e. $\tilde{\mu}(A) < \infty$. Osoita, että $\tilde{\mu}\llcorner A$ on Borel-säännöllinen. [Tässä $\tilde{\mu}\llcorner A$ on ulkomitta, joka määritellään kaavalla $(\tilde{\mu}\llcorner A)(B) = \tilde{\mu}(A \cap B)$.]

2. Olkoon (X, d) separoituva metrinen avaruus ja $A_k \subset X$, $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että

$$\dim_{\mathcal{H}}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \dim_{\mathcal{H}}(A_k).$$

3. Olkoon (μ_k) jono $\mathbb{R}^n$:n Radon-mittoja, joka suppenee heikosti kohti Radon-mittaa μ. Osoita, että

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k(A) = \mu(A)$$

pätee rajoitetulle Borel-joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$, jos $\mu(\partial A) = 0$.

4. Olkoot μ ja ν Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Borel-joukko ja $0 < t < \infty$. Todista:
(a) Jos $\overline{D}_\nu \mu(x) \geq t$ kaikilla $x \in A$, niin $\mu(A) \geq t\nu(A)$.
(b) Jos $\underline{D}_\nu \mu(x) \leq t$ kaikilla $x \in A$, niin $\mu(A) \leq t\nu(A)$.
[Vitalin peitelause $\mathbb{R}^n$:n Radon-mitoille oletetaan tunnetuksi.]

5. Olkoon $(X, \mathcal{M})$ on mitallinen avaruus ja $\mu\colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$ merkkimitta. Oletetaan, että (P, P^c) ja (D, D^c) ovat μ:n Hahnin hajotelmia.
(a) Osoita: Jos $A \in \mathcal{M}$ ja $A \subset (D \setminus P) \cup (P \setminus D)$, niin $\mu(A) = 0$.
(b) Osoita: Jos $A \in \mathcal{M}$ ja $A \subset (D^c \setminus P^c) \cup (P^c \setminus D^c)$, niin $\mu(A) = 0$.
(c) Osoita, että $\mu(A \cap D) = \mu(A \cap P)$ ja $\mu(A \cap D^c) = \mu(A \cap P^c)$ kaikilla $A \in \mathcal{M}$.