**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Mitta ja integraali**
**Loppukoe**
**9.8.2007**

1. Määrittele Lebesgue'n ulkomitta. Osoita, että $m^*(A \cup B) = m^*(A)$ jos $m^*(B) = 0$.

2. Olkoot $A_k \subset [0,1], k = 1, 2, \dots$, mitallisia joukkoja siten, että kaikille $k = 1, 2, \dots$ on

$$m(A_k) > \frac{2^k - 1}{2^k}.$$

Osoita, että $\bigcap_{=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$.

3. Määrittele mitallinen funktio. Todista, että jos $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen ja $f : E \to \mathbb{R}$ on sellainen funktio, että $\{x \in E : f(x) < q\}$ on mitallinen kaikille rationaaliluvuille $q$, niin $f$ on mitallinen.

4. Määritä raja-arvo

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} dx$$

ja perustele väitteesi.

5. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ integroituva funktio sekä $A_k = \{x \in A : |f(x)| > k\}$. Osoita, että $\lim_{k \to \infty} km(A_k) = 0$.

**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Mitta ja integraali**
**Loppukoe**
**23.10.2007**

1. Todista Lebesguen ulkomitan määritelmään nojautuen, että

$$m^*(\{x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, 0 < y < x^{-2}\}) < \infty.$$

2. Määrittele mitallinen joukko. Todista, että jos $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $m^*(A) = 0$, niin $A$ on mitallinen.

3. Määrittele mitallinen funktio. Todista, että jos $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ja $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ovat mitallisia funktioita, niin $h, h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, on mitallinen.

4. Määritä raja-arvo

$$\lim_{i\to\infty} i \int_1^\infty x^{-3} \sin(x/i) \cos(x/(i)dx$$

ja perustele väitteesi.

5. Olkoot $E_1, E_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja siten, että $E_i \subset B(0,1)$ kaikille $i = 1, 2, \dots,$ ja jokainen $\mathbb{R}^n$:n piste kuuluu korkeintaan kolmeen eri joukkoon $E_i$. Osoita, että

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) < \infty.$$

**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Mitta ja integraali**
**Loppukoe**
**18.12.2007**

1. Todista Lebesguen ulkomitan määritelmään nojautuen, että

$$m^*(\{x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, 0 < y < x^{-2}\}) < \infty.$$

2. Määrittele mitallinen joukko. Todista, että jos $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $m^*(A) = 0$, niin $A$ on mitallinen.

3. Määrittele mitallinen funktio. Todista, että jos $f : E \to \mathbb{R}$ ja $g : E \to \mathbb{R}$ ovat mitallisia funktioita, niin $h, h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, on mitallinen.

4. Määritä raja-arvo

$$\lim_{i \to \infty} i \int_1^\infty x^{-3} \sin(x/i) \cos(x/i) dx$$

ja perustele väitteesi.

5. Olkoot $E_1, E_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja siten, että $E_i \subset B(0,1)$ kaikille $i = 1, 2, \dots$, ja jokainen $\mathbb{R}^n$:n piste kuuluu korkeintaan kolmeen eri joukkoon $E_i$. Osoita, että

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) < \infty.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe
4.3.2008

1. Olkoon $G$ tason $\mathbb{R}^2$ osajoukko
$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R}\}.$$
Määritä $m_2^*(G)$.

2. Kuvaus $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on $L$-Lipschitz, jos
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$
kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Osoita: Jos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on $L$-Lipschitz, niin
$$m_1^*\big(f(A)\big) \leq L\, m_1^*(A)$$
kaikilla $A \subset \mathbb{R}$.
   (b) Päteekö vastaava tulos $L$-Lipschitz kuvauksille $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$? Toisin sanoen, onko olemassa sellaista (mahdollisesti $L$:stä riippuvaa) vakiota $C < \infty$, että
$$m_1^*\big(g(A)\big) \leq C\, m_2^*(A)$$
kaikilla $A \subset \mathbb{R}^2$? [Perustelu!]

3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $f_j\colon A \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, jono mitallisia funktioita.
   (a) Osoita, että joukot $\{x \in A\colon f_{j+1}(x) > f_j(x)\}$ ovat mitallisia.
   (b) Osoita, että joukko $\{x \in A\colon$ jono $(f_j(x))_{j=1}^\infty$ on aidosti kasvava$\}$ on mitallinen.

4. Laske raja-arvo
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\left(1 + e^{-x/n}\right)^2}{1 + x^2}\, dx.$$
[Jos käytät jotain konvergenssilausetta, niin muista perustella käyttö tarkasti!]

5. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sellainen integroituva funktio, että
$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$
kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että
$$\lim_{r\to\infty} \sup\{|f(x)|\colon |x| > r\} = 0.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe
3.4.2008

1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen. Osoita, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen avoin joukko $G \subset \mathbb{R}^n$, että $A \subset G$ ja $m(G \setminus A) < \varepsilon$.

2. Olkoon $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ sellainen jono $\mathbb{R}^n$:n mitallisia osajoukkoja, että
$$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) < \infty.$$
Osoita, että joukko $\{x \in \mathbb{R}^n : x \in E_i \text{ äärettömän monella } i \in \mathbb{N}\}$ on nollamittainen.

3. (a) Olkoon $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n$ kasvava jono $\mathbb{R}^n$:n mitallisia osajoukkoja. Osoita, että tällöin
$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i\to\infty} m(A_i).$$
(b) Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integroituva ja $\int_{\mathbb{R}^n} f > 0$. Osoita (esimerkiksi (a)-kohdan avulla), että on olemassa sellainen $r > 0$, että
$$m\big(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > r\}\big) > r.$$

4. (a) Esitä monotonisen konvergenssin lause (MKL) oletuksineen (lausetta *ei* tarvitse todistaa).
(b) Esitä Fatoun lemma oletuksineen ja todista se MKL:n avulla.

5. Olkoon $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mitallinen funktio. Osoita, että funktiot $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$g_n(x) = \frac{n\,f(x)}{1 + \big(n\,f(x)\big)^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$
ovat integroituvia yli välin $[0,1]$ ja laske raja-arvo
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe
12.6.2008

1. (a) Määrittele käsitteet:
   (i) *Lebesguen n-ulotteinen ulkomitta* $m_n^*$.
   (ii) *Lebesgue-mitallinen joukko* $E \subset \mathbb{R}^n$.

   (b) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukko. Osoita, että
$$m_n^*(A) = \inf\{m_n(U) \colon A \subset U,\, U \text{ avoin}\}.$$

2. Olkoon $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ sellainen jono $\mathbb{R}^n$:n mitallisia osajoukkoja, että
$$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) < \infty.$$
Osoita, että joukko $\{x \in \mathbb{R}^n \colon x \in E_i \text{ äärettömän monella } i \in \mathbb{N}\}$ on nollamittainen.

3. (a) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja olkoot $f \colon A \to \mathbb{R}$ ja $g \colon A \to \mathbb{R}$ mitallisia funktioita. Osoita, että joukot $\{x \in A \colon f(x) < g(x)\}$ ja $\{x \in A \colon f(x) = g(x)\}$ ovat mitallisia.

   (b) Oletetaan, että funktiot $f_k \colon A \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, ovat mitallisia. Osoita, että joukko
$$\{x \in A \colon \exists \lim_{k\to\infty} f_k(x) \in \mathbb{R}\}$$
on mitallinen.

4. Olkoon $f \colon E \to \mathbb{R}$ mitallinen funktio, missä $E$ on mitallinen joukko, jolle $m(E) < \infty$. Merkitään $E_i = \{x \in E \colon 0 < f(x) < 1/i\}$, kun $i = 1, 2, \ldots$. Osoita, että $\lim_{i\to\infty} m(E_i) = 0$.

5. Laske raja-arvo
$$\lim_{k\to\infty} k \int_0^1 x^{3/2} \sin\frac{x}{k}\, dx.$$
[Jos käytät jotain konvergenssilausetta, niin muista perustella käyttö tarkasti!]

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe
14.8.2008

1. (a) Määrittele käsite: *Lebesguen n-ulotteinen ulkomitta* $m_n^*$.
   (b) Osoita, että $m_1^*(\{x^2 : x \in A\}) = 0$, jos $A \subset [0,1]$ ja $m_1^*(A) = 0$.

2. Olkoot $A$ ja $B$ sellaisia Lebesgue-mitallisia $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja, että $m(A \cap B) < \infty$. Osoita, että

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

3. (a) Määrittele käsite: *(Lebesgue-)mitallinen funktio* $f : A \to \dot{\mathbb{R}}$.
   (b) Osoita, että $f^2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on mitallinen, jos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on mitallinen.

4. Osoita, että toinen seuraavista väitteistä on oikein ja toinen väärin:
   (a) Jos $f$ on integroituva funktio joukossa $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$, niin myös $|f|^{1/2}$ on integroituva $A$:ssa.
   (b) Jos $f$ on integroituva funktio joukossa $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$, niin myös $|f|^{1/2}$ on integroituva $B$:ssä.

5. Laske raja-arvo

$$\lim_{k \to \infty} \int_1^k x^{-2} e^{x/k} \cos(x/k)\, dx.$$

[Jos käytät jotain konvergenssilausetta, niin muista perustella käyttö tarkasti!]

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe
21.10.2008

1. (a) Esitä Lebesguen $n$-ulotteisen ulkomitan $m_n^*$ määritelmä.
   (b) Esitä (Lebesgue-)mitallisen joukon määritelmä.
   (c) Osoita: Jos $m_n^*(E) = 0$, niin $E$ on mitallinen.

2. Määritellään funktio $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ asettamalla $f(0) = 0$ ja $f(x) = k$, kun $\frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Onko $f$ mitallinen? Perustelu!

3. Laske raja-arvo
$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k\sin^2 x}}{1+x^2}\, dx.$$
[Jos käytät jotain konvergenssilausetta, niin muista perustella käyttö tarkasti!]

4. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mitallinen ja olkoon
$$A_k = \{x \in \mathbb{R}\colon 2^{k-1} < |f(x)| \leq 2^k\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
Osoita, että $f$ on integroituva täsmälleen silloin, kun
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m(A_k) < \infty.$$

5. Muotoile Fatoun lemma (ei tarvitse todistaa). Anna esimerkki, jossa Fatoun lemman väitteessä pätee aito epäyhtälö.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe
16.12.2008

1. (a) Määrittele käsitteet:
   (i) *Lebesguen n-ulotteinen ulkomitta* $m_n^*$.
   (ii) *Lebesgue-mitallinen joukko* $E \subset \mathbb{R}^n$.

   (b) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukko ja $\varepsilon > 0$. Osoita, että on olemassa avoin joukko $G$ siten, että $A \subset G$ ja
$$m_n^*(G) \leq m_n^*(A) + \varepsilon.$$

2. Kuvaus $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on $L$-Lipschitz, jos
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$
kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Osoita: Jos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on $L$-Lipschitz, niin
$$m_1^*\big(f(A)\big) \leq L\, m_1^*(A)$$
kaikilla $A \subset \mathbb{R}$.

   (b) Päteekö vastaava tulos $L$-Lipschitz kuvauksille $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$? Toisin sanoen, onko olemassa sellaista (mahdollisesti $L$:stä riippuvaa) vakiota $C < \infty$, että
$$m_1^*\big(g(A)\big) \leq C\, m_2^*(A)$$
kaikilla $A \subset \mathbb{R}^2$? [Perustelu!]

3. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko, $m(E) < \infty$ ja $f\colon E \to \mathbb{R}$ mitallinen funktio. Merkitään $E_i = \{x \in E\colon 0 < f(x) < 1/i\}$, kun $i = 1, 2, \ldots$. Osoita, että $\lim_{i\to\infty} m(E_i) = 0$.

4. Laske raja-arvo
$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}}.$$
[Perustelu!]

5. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sellainen integroituva funktio, että
$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$
kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että
$$\lim_{r\to\infty} \sup\{|f(x)|\colon |x| > r\} = 0.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe
3.3.2009

1. Osoita, että
$$m_2^*\big(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x>1,\ 0<y<1/x^2\}\big)<\infty.$$

2. Olkoon $A\subset\mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f\colon A\to\mathbb{R}$. Merkitään
$$A_0=\{x\in A\colon f \text{ on jatkuva } x\text{:ssä}\}.$$
Oletetaan, että $m(A\setminus A_0)=0$. Osoita, että $f$ on mitallinen.

3. (a) Olkoon $A\subset\mathbb{R}^n$ ja olkoot $f\colon A\to\mathbb{R}$ ja $g\colon A\to\mathbb{R}$ mitallisia funktioita. Osoita, että joukot $\{x\in A\colon f(x)<g(x)\}$ ja $\{x\in A\colon f(x)=g(x)\}$ ovat mitallisia.
   (b) Oletetaan, että funktiot $f_k\colon A\to\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$, ovat mitallisia. Osoita, että joukko
$$\{x\in A\colon \exists \lim_{k\to\infty} f_k(x)\in\mathbb{R}\}$$
on mitallinen.

4. Olkoon $A\subset\mathbb{R}^n$ ja $f\colon A\to\dot{\mathbb{R}}$ integroituva funktio. Osoita, että
$$m\big(\{x\in A\colon |f(x)|>c\}\big)\le\frac{1}{c}\int_A|f|$$
jokaisella $c>0$.

5. Laske raja-arvo
$$\lim_{k\to\infty}\int_{-k}^{k}\frac{\sin(x^k)}{x^{k-2}}\,dx.$$
[Jos käytät jotain konvergenssilausetta, niin muista perustella käyttö tarkasti!]

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe
2.4.2009

1. (a) Määrittele käsite: *Lebesguen $n$-ulotteinen ulkomitta* $m_n^*$.
   (b) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukko. Osoita, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa avoin joukko $B \subset \mathbb{R}^n$, jolla $A \subset B$ ja
$$m_n^*(B) \leq m_n^*(A) + \varepsilon.$$

2. Olkoot joukot $A_k \subset [0,1]$, $k = 1, 2, \ldots$, mitallisia. Oletetaan, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ on voimassa
$$m(A_k) > \frac{2^k - 1}{2^k}.$$
Osoita, että leikkausjoukko $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ on epätyhjä.

3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $f_j \colon A \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, jono mitallisia funktioita.
   (a) Osoita, että joukot $\{x \in A \colon f_{j+1}(x) > f_j(x)\}$ ovat mitallisia.
   (b) Osoita, että joukko $\{x \in A \colon$ jono $(f_j(x))_{j=1}^{\infty}$ on aidosti kasvava$\}$ on mitallinen.

4. Osoita, että toinen seuraavista väitteistä on oikein ja toinen väärin:
   (a) Jos $f$ on integroituva funktio joukossa $A = \{x \in \mathbb{R} \colon |x| < 1\}$, niin myös $|f|^{1/2}$ on integroituva $A$:ssa.
   (b) Jos $f$ on integroituva funktio joukossa $B = \{x \in \mathbb{R} \colon |x| > 1\}$, niin myös $|f|^{1/2}$ on integroituva $B$:ssä.

5. Olkoon $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integroituva. Osoita, että funktio $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(xt)\, dt, \quad x \in \mathbb{R},$$
on jatkuva. [Vihje: Osoita sopivaa konvergenssilausetta käyttäen, että $g(x_k) \to g(x)$, jos $x \in \mathbb{R}$, $x_k \in \mathbb{R}$ ja $x_k \to x$.]

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe
11.6.2009

1. (a) Määrittele käsite: *Lebesguen n-ulotteinen ulkomitta* $m_n^*$.
   (b) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ numeroituva joukko. Osoita ulkomitan määritelmästä lähtien, että $m_n^*(A) = 0$.

2. (a) Olkoon $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n$ kasvava jono $\mathbb{R}^n$:n mitallisia osajoukkoja. Osoita, että tällöin

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i\to\infty} m(A_i).$$

   (b) Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integroituva ja $\int_{\mathbb{R}^n} f > 0$. Osoita (esimerkiksi (a)-kohdan avulla), että on olemassa sellainen $r > 0$, että

$$m\big(\{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) > r\}\big) > r.$$

3. Onko funktio $f\colon ]0,\infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \log x, & \text{jos } \log x \notin \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{jos } \log x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

mitallinen? Perustelu!

4. (a) Esitä monotonisen konvergenssin lause (lausetta *ei* tarvitse todistaa).
   (b) Todista seuraava "laskeva monotonisen konvergenssin lause": Olkoot $f_j\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, mitallisia funktioita ja

$$f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f_j \geq f_{j+1} \geq \cdots \geq 0.$$

   Jos $\int_E f_1 < \infty$, niin

$$\int_E \lim_{j\to\infty} f_j = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j.$$

5. Osoita, että jokaiselle integroituvalle funktiolle $f\colon A \to \mathbb{R}$ pätee

$$\lim_{i\to\infty} \int_{\{x\in A\colon |f(x)|>i\}} f = 0\,.$$

**Mitta ja Integraali -kurssin loppukoe.**
Kesäkurssi 2009 / Talponen.
17.6.2009 klo 13-17 sali CK112.

Vastaa viiteen tehtävään. Huomaa: tehtäviä paperin molemmilla puolilla.

1. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ määritellään kuvaus $f_n \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ asettamalla $f_n(x,y) = \cos(nx)e^{-ny^4}$, missä $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Laske

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} f_n \, dm_2(x,y).$$

2. Olkoot $k, l, n \in \mathbb{N}$ ja $A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots, B_l \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia, äärellismittaisia osajoukkoja, sekä $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_l \in \mathbb{R}$. (Yllä kiinnitettyjen osajoukkojen ei tarvitse olla erillisiä.) Oletamme, että

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}(x) = \sum_{j=1}^{l} b_j \chi_{B_j}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Näytä, että

$$\sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i) = \sum_{j=1}^{l} b_j m(B_j).$$

3. Kuvaus $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *Lipschitz*, jos on olemassa vakio $L > 0$ siten, että $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Osoita: jos $A \subset \mathbb{R}$ on 0-mittainen joukko, niin kuva $fA$ on Lebesgue-mitallinen ja $m(fA) = 0$.

4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ sellainen osajoukko, että jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa avoin joukko $G_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$ siten, että

$$A \subset G_\epsilon \quad \text{ja} \quad m^*(G_\epsilon \setminus A) < \epsilon.$$

Näytä, että $A$ on Lebesgue-mitallinen joukko.