Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Metristen avaruuksien differentioituvat struktuurit
Loppukoe
19.12.2007

1. (a) Muotoile Morreyn epäyhtälö funktioille $u \in W^{1,p}(B)$, missä $B = B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ ja $p > n$. [Epäyhtälöä ei tarvitse todistaa.]
   (b) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ jollakin $p > n$. Osoita Morreyn epäyhtälön avulla, että u on differentioituva m.k. Ω:ssa.

2. Todista McShane-Whitney jatkolause: Olkoon X metrinen avaruus, $A \subset X$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ L-Lipschitz. Tällöin on olemassa L-Lipschitz funktio $F\colon X \to \mathbb{R}$ s.e. $F|A = f$.

3. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja $\varepsilon > 0$. Sanomme, että kuvaus $f\colon X \to Y$ on ε-lähi-isometria, jos
$$Y = \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon)$$
ja
$$|x-y| - \varepsilon \leq |f(x) - f(y)| \leq |x-y| + \varepsilon$$
kaikilla $x, y \in X$. [Sekä X:n että Y:n metriikkoja on merkitty symbolilla $|a-b|$.] Todista:
   (a) Jos $d_{\mathrm{GH}}(X,Y) < \varepsilon$, niin on olemassa 2ε-lähi-isometria $f\colon X \to Y$.
   (b) Jos on olemassa ε-lähi-isometria $f\colon X \to Y$, niin $d_{\mathrm{GH}}(X,Y) \leq 2\varepsilon$.

4. Olkoon (X,d) metrinen avaruus, μ Radon-mitta X:ssä ja $\mathcal{C} \subset \mathrm{LIP}(X)$ vektoriavaruus. Määrittele käsite (X,d,μ):n vahva mitallinen differentioituva struktuuri $\mathcal{C}$:n suhteen.

5. Olkoon $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$ ei-degeneroitunut vahva mitallinen differentioituva struktuuri. Osoita, että $N(\alpha) = N(\beta)$, jos $\mu(X_\alpha \cap X_\beta) > 0$.