

Matematiikan laitos

Metristen avaruuksien differentioituvat struktuurit

Loppukoe

16.3.2004

- (a) Muotoile Morreyn epäyhtälö funktioille $u \in W^{1,p}(B)$, missä $B = B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ ja $p > n$. [Epäyhtälöä ei tarvitse todistaa.]
(b) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$ jollakin $p > n$. Osoita Morreyn epäyhtälön avulla, että u on differentioituva m.k. Ω :ssa.

- Todista McShane-Whitney jatkolause: Olkoon X metrinen avaruus, $A \subset X$ ja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ L -Lipschitz. Tällöin on olemassa L -Lipschitz funktio $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ s.e. $F|_A = f$.

- Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja $\varepsilon > 0$. Sanomme, että kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on ε -lähi-isometria, jos

$$Y = \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon)$$

ja

$$|x - y| - \varepsilon \leq |f(x) - f(y)| \leq |x - y| + \varepsilon$$

kaikilla $x, y \in X$. [Sekä X :n että Y :n metriikkoja on merkitty symbolilla $|a - b|$.]

Todista:

- (a) Jos $d_{\text{GH}}(X, Y) < \varepsilon$, niin on olemassa 2ε -lähi-isometria $f: X \rightarrow Y$.
(b) Jos on olemassa ε -lähi-isometria $f: X \rightarrow Y$, niin $d_{\text{GH}}(X, Y) \leq 2\varepsilon$.
- Olkoon (X, d) metrinen avaruus, μ Radon-mitta X :ssä ja $\mathcal{C} \subset \text{LIP}(X)$ vektoriavaruus. Määrittele käsite (X, d, μ) :n vahva mitallinen differentioituva struktuuri \mathcal{C} :n suhteen.
- Olkoon $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$ ei-degeneroitunut vahva mitallinen differentioituva struktuuri. Osoita, että $N(\alpha) = N(\beta)$, jos $\mu(X_\alpha \cap X_\beta) > 0$.