

Helsingin yliopisto/Matematiikan laitos
MATEMATIIKAN MENETELMÄKURSSI
 Tentti, 2007-12-13
VASTAA NELJÄÄN TEHTÄVÄÄN!
MATLAB-TEHTÄVÄT SAA TEHDÄ MYÖS MUILLA KIELILLÄ!

1. Tarkastellaan yhtälöryhmää

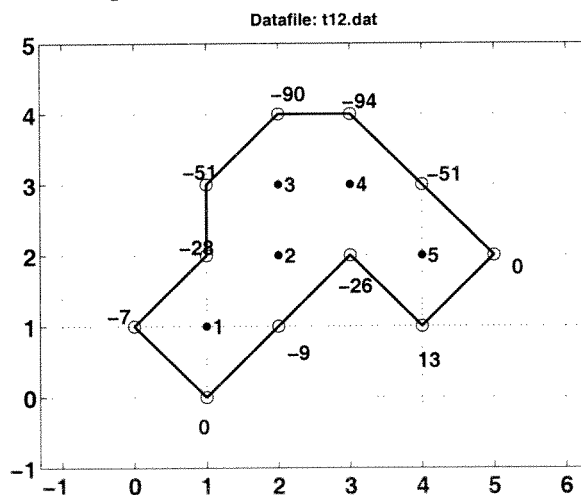
$$\begin{cases} x_1 * x_2 - 3 * x_2 - 4 * x_1 = -12; \\ x_1 * x_2 - 3 * x_1 = 3; \end{cases}$$

- (a) Muodosta Jacobin matriisi.
- (b) Kirjoita Newtonin iteraatiokaava yhtälöryhmän ratkaisemiseksi.
- (c) Aloita iteraatio pisteestä [3,3] ja tee 2 iteraatiota. Kunkin iteraatioaskeleen x_n kohdalla ilmoita $f(x_n)$, $J_f(x_n)$ ja $J_f(x_n)^{-1}f(x_n)$. Tee kaikki laskut käsin.
- (d) Kirjoita lisäksi tarkoitukseen sopiva MATLAB -ohjelma.

2. Ratkaise Dirichletin ongelma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

oheisen kuvan tapauksessa ja indeksoiden tuntemattomat kuvanmukaisin indeksein 1, ..., 5. Ruudun sivunpituus on 1. Tee kaikki laskut käsin. Esitä lisäksi tarkoitukseen sopiva MATLAB ohjelma.



3. Tarkastellaan reuna-arvotehtävää $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) = y(1) = 0$.

- (a) Johda lauseke toisen derivaatan differenssiapproksimaatiolle ja muodosta tämän avulla reuna-arvotehtävän diskreetti muoto pisteissä $x_k = k/(N + 1)$, $k = 1, \dots, N$.

Helsingin yliopisto/Matematiikan laitos
MATEMATIIKAN MENETELMÄKURSSI
 Loppukoe, 2008-01-24
VASTAA VIITEEN TEHTÄVÄÄN!

1. Selosta MATLABin (tai Maplen) käyttömahdollisuuksia seuraavissa sovelluksissa (a) Funktion $z = |x|^y$ pinnan piirto kun $-2 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

(b) Datan $((x,y)$ -parien) lukeminen tiedostosta ja kuvan piirtäminen.

(c) Lineaarisen yhtälöryhmän $ax = b$ ratkaisu, kun a on neliömatriisi.

2. Sovita malli $f(a, b, x) = a/(x + 1) + b$ seuraaviin (x, y) -pareihin:

| | | | | |
|------|-----|-----|------|-----|
| x(j) | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | | | |
| y(j) | 6.0 | 6.1 | 6.15 | 6.2 |

Merkitään $S(a, b) = \sum_{j=1}^4 (f(a, b, x_j) - y_j)^2$,

$$s_1 = \sum_{j=1}^4 \frac{1}{(x_j + 1)^2}, s_2 = \sum_{j=1}^4 \frac{1}{x_j + 1}, s_3 = \sum_{j=1}^4 \frac{y_j}{x_j + 1}, s_4 = \sum_{j=1}^4 y_j.$$

(a) Muodosta normaaliyhtälöt, jotka saadaan vaatimuksesta, että $S(a, b)$:n osittaisderivaatat ovat nollia.

(b) Ratkaise ne käsin laskemalla a :n ja b :n suhteen. Numeerisia arvoja ei vaadita.

3. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 * x_2 - 3 * x_2 - 4 * x_1 = -12; \\ x_1 * x_2 - 3 * x_1 = 3; \end{cases}$$

(a) Muodosta Jacobin matriisi.

(b) Kirjoita Newtonin iteraatiokaava yhtälöryhmän ratkaisemiseksi.

(c) Aloita iteraatio pisteestä $[3,3]$ ja tee 2 iteraatiota. Kunkin iteraatioaskeleen x_n kohdalla ilmoita $f(x_n)$, $J_f(x_n)$ ja $J_f(x_n)^{-1}f(x_n)$. Tee kaikki laskut käsin.

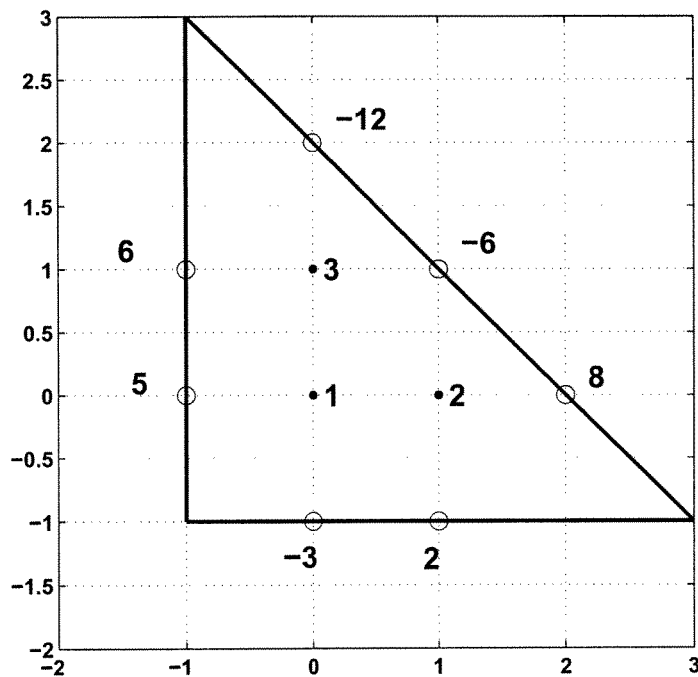
(d) Kirjoita lisäksi tarkoitukseen sopiva MATLAB -ohjelma.

4. (a) Selosta Eulerin menetelmän käyttöä alkuarvot tehtävän $y'(t) = (t - y)/2, y(0) = 1$ ratkaisussa välillä $[0, 3]$ kun diskretointiaskeleen pituus $h = 1$. Laske käsin funktion arvot approksimaatiot ko. pisteissä $t = 0, 1, 2, 3$.

(b) Tee tarkoitukseen sopiva MATLAB ohjelma.

5. Tarkastelemme Dirichletin ongelmaa kuvanmukaisessa tilanteessa.

- (a) Selosta kuvan perusteella ko. tehtävä sekä muodosta differenssiyhtälöt tuntemattomien ratkaisemiseksi käyttäen kuvasta ilmenevää indeksointia.
- (b) Ratkaiset yhtälöt käsin.
- (c) Selosta miten voit ratkaista yhtälöt MATLABilla.



6. Erään kurssin seitsemään ensimmäiseen viikottaiseen harjoitukseen osallistuneiden lukumäärät olivat 21, 16, 16, 15, 13, 13 ja 13.

Sovita tähän aineistoon muotoa $y = \lambda_1 \exp(-\lambda_2 x)$ oleva malli, ja ennusta harjoitukseen 12 osallistuvien lukumäärä.

Kuten harjoituksissa on todettu, sopivalla skaalauksella voi olla numeeristen laskutoimitusten suorittamiseen edullinen vaikutus tämänkaltaisissa tehtävissä. Mikä olisi sopiva skaalaus tässä tilanteessa?

Helsingin yliopisto/Matematiikan ja tilastotieteen laitos

MATEMATIIKAN MENETELMÄKURSSI

Tentti, 2008-08-14

VASTAA VIITEEN TEHTÄVÄÄN!

OHJELMOINTITEHTÄVÄT SAA TEHDÄ MYÖS MAPLELLA!

1. Selosta seuraavien asioiden merkitystä numeerisessa laskennassa:

(a) pyöritysvirheiden kasautuminen laskennan aikana,

(b) merkitsevien numeroiden tarkkuutta haittaava kumoutuminen,

(c) kuntoisuusluvun vaikutus merkitsevien numeroiden lukumäärään lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisussa.

Selosta MATLABin käyttöä muutaman rivin koodilla kunkin seuraavan ongelman tapauksessa:

(d) funktion $y = f(x)$, $f(x) = 2^{-|x \sin(x)|}$, kuvaajan piirto välillä $[-2, 3]$ ja kuvan otsikointi,

(e) polynomien juurien muodostaminen, kun kertoimet tunnetaan ja toisaalta polynomien kertoimien muodostaminen, kun juuret tunnetaan,

(f) lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu.

2. Sovita malli $f(a, b, x) = a/(x + 1) + b$ seuraaviin (x, y) -pareihin:

| | | | | |
|-------|-----|-----|------|-----|
| x(j) | 1 | 2 | 3 | 4 |
| ----- | | | | |
| y(j) | 6.0 | 6.1 | 6.15 | 6.2 |

Merkitään $S(a, b) = \sum_{j=1}^4 (f(a, b, x_j) - y_j)^2$,

$$s_1 = \sum_{j=1}^4 \frac{1}{(x_j + 1)^2}, s_2 = \sum_{j=1}^4 \frac{1}{x_j + 1}, s_3 = \sum_{j=1}^4 \frac{y_j}{x_j + 1}, s_4 = \sum_{j=1}^4 y_j.$$

Muodosta normaaliyhtälöt, jotka saadaan vaatimuksesta, että $S(a, b)$:n osittaisderivaatat ovat nollia, ja ratkaise ne käsin laskemalla a :n ja b :n suhteen. Numeerisia arvoja ei vaadita.

3. Oletamme, että A on ei-singulaarinen $n \times n$ matriisi sarakkein $A^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$, ja x ja b ovat $n \times 1$ vektoreita. Cramerin säännön mukaan yhtälöryhmän $Ax = b$ ratkaisu saadaan kaavasta

$$x_j = (\det(A)^{-1}) \det(C_j), \quad C_j = [A^{(1)} \ A^{(2)} \ \dots \ A^{(j-1)} \ b \ A^{(j+1)} \ \dots \ A^{(n)}],$$

kun $j = 1, \dots, n$. Tee MATLAB ohjelma, joilla testaat kaavaa numeerisesti.

4. Tarkastellaan yhtälöryhmää

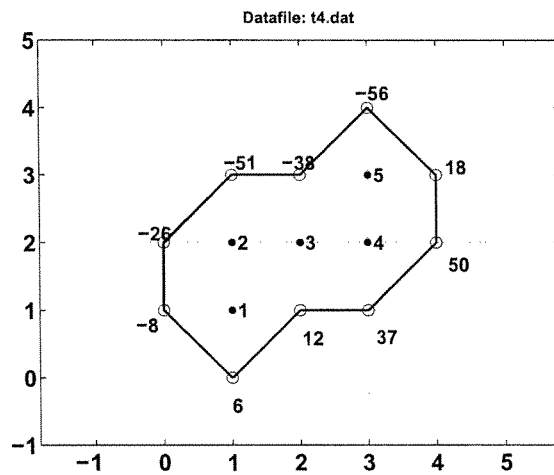
$$\begin{cases} 5x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1 + 1 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 5 = 0 \end{cases}$$

- (a) Muodosta Jacobin matriisi Newtonin menetelmää varten.
- (b) Kirjoita Newtonin iteraatiokaava yhtälöryhmän ratkaisemiseksi.
- (c) Aloita iteraatio pisteestä $x_0 = [0,1]$ ja tee yksi iteraatio.

5. Ratkaise Dirichletin ongelma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

oheisen kuvan tapauksessa ja indeksoiden tuntemattomat kuvanmukaisin indeksein 1, ..., 5. Ruudun sivunpituus on 1. Tee kaikki laskut käsin.



6. Suorakulmion muotoisella luonnonsuojelualueella pesii 5 karhua satunnaisissa paikoissa. Kunkin alueen piste kuuluu sen karhun reviiriin, jonka pesä on lähinnä. Piirrä MATLABilla havainnollinen kuva reviireistä.

Helsingin yliopisto/Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATEMATIIKAN MENETELMÄKURSSI I
 Kurssikoe, 2008-10-15

1. Selosta seuraavien asioiden merkitystä numeerisessa laskennassa:
 (a) pyöristyvirheiden kasautuminen laskennan aikana,
 (b) merkitsevien numeroiden tarkkuutta haittaava kumoutuminen,
 (c) kuntoisuusluvun vaikutus merkitsevien numeroiden lukumäärään lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisussa.

Selosta MATLABin käyttöä muutaman rivin koodilla kunkin seuraavan ongelman tapauksessa:

(d) funktion $y = f(x)$, $f(x) = 2^{-|x \sin(x)|}$, kuvaajan piirto välillä $[-2, 3]$ ja kuvan otsikointi,

(e) polynomien juurien muodostaminen, kun kertoimet tunnetaan ja toisaalta polynomien kertoimien muodostaminen, kun juuret tunnetaan,

(f) lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu.

2. Yksikköneliössä sijaitsee p kpl satunnaisesti valittuja pisteitä. Muodosta MATLAB-ohjelmalla ko. pisteet, niiden välimatkataulukko ja tulosta se formaatissa

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|------|------|------|------|------|
| 1 | 0.00 | | | | |
| 2 | 0.76 | 0.00 | | | |
| 3 | 0.60 | 0.43 | 0.00 | | |
| 4 | 0.92 | 0.20 | 0.46 | 0.00 | |
| 5 | 0.78 | 0.18 | 0.31 | 0.16 | 0.00 |

piirrä pisteet tasoon.

3. Puolen vuoden välein suoritetuissa muistitesteissä muistetun taso kehittyi seuraavasti: 12 11 10 8 7 5. Sovita tähän aineistoon muotoa $y = \lambda_1 \exp(-\lambda_2 x)$ oleva malli, ja ennusta tulos mittauksessa 12. Tee tarkoitukseen sopiva MATLAB-ohjelma. Numeerisia tuloksia ei vaadita.

4. (a) Funktion $f(x) = \sin(x)$ numeerista derivointia tutkitaan lausekkeen $(f(x+2h) - f(x-2h))/(2h)$ avulla. Selosta mitä ongelmia voi esiintyä ja miten ne voidaan välttää.

(b) Asian kokeellista selvitystä varten tehtiin seuraava MATLAB-ohjelma.

```
% FILE t4.m begins.
myf=inline('cos(s) -(sin(s+h)-sin(s-h))./(2*h)', 's', 'h')
```

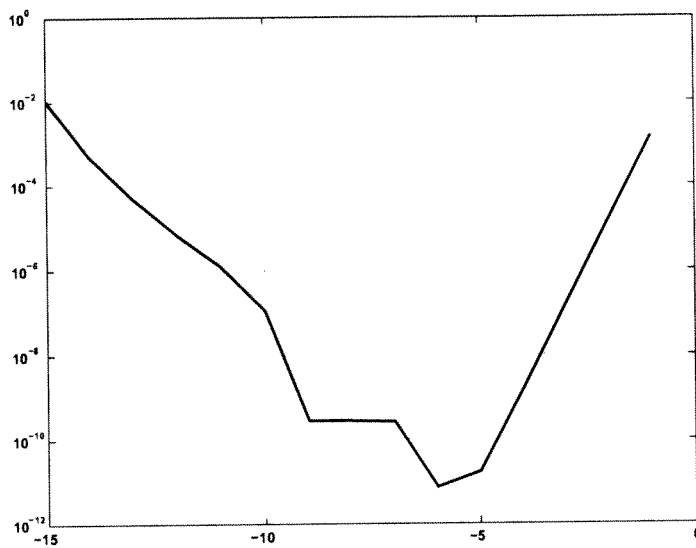
¹FILE:~/MME08/tenntti/0810/mme081015hy.tex — 14. lokakuuta 2008 (klo 0.00).

```

s= 0.5;  x=[];  z= [];
for j=1:15
    x=[x -j]; h= 10^(-j);
    z=[z myf(s,h)];
end
semilogy(x, abs(z)+ 1e-16,'LineWidth',2)
% FILE t4.m ends.

```

Tuloksista saatiin seuraava kuva.



Mitä suosituksia kuvan perusteella voidaan antaa h :n valinnalle?

Helsingin yliopisto/Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATEMATIIKAN MENETELMÄKURSSI
 Tentti, 2008-12-10
VASTAA NELJÄÄN TEHTÄVÄÄN!
MATLAB-TEHTÄVÄT SAA TEHDÄ MYÖS MUILLA KIELILLÄ!

1. Tarkastellaan yhtälöryhmää

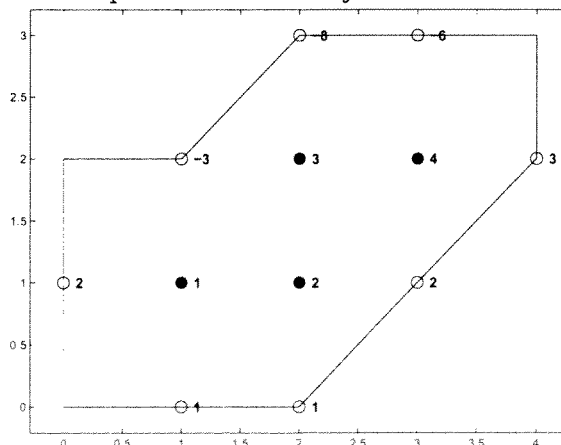
$$\begin{cases} x_1 * x_2 - 3 * x_2 - 4 * x_1 = -12; \\ x_1 * x_2 - 3 * x_1 = 3; \end{cases}$$

- (a) Muodosta Jacobin matriisi.
- (b) Kirjoita Newtonin iteraatiokaava yhtälöryhmän ratkaisemiseksi.
- (c) Aloita iteraatio pisteestä [3,3] ja tee 2 iteraatiota. Kunkin iteraatioaskeleen x_n kohdalla ilmoita $f(x_n)$, $J_f(x_n)$ ja $J_f(x_n)^{-1}f(x_n)$. Tee kaikki laskut käsin.
- (d) Kirjoita lisäksi tarkoitukseen sopiva MATLAB -ohjelma.

2. Ratkaise Dirichletin ongelma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

oheisen kuvan tapauksessa ja indeksoiden tuntemattomat kuvanmukaisin indekseihin 1, ..., 5. Ruudun sivunpituus on 1. Tee kaikki laskut käsin. Esitä lisäksi tarkoitukseen sopiva MATLAB ohjelma.



3. Tarkastellaan tehtävää approksimoida funktiota $\sin(x)$ välillä $[a, b]$ astetta p olevilla polynomilla L^2 normin mielessä. Muodosta tehtävään liittyvät normaaliyhtälöt kun $p = 2$ ja polynomi on $ax^2 + bx + c$ (ei tarvitse ratkaista). Tee myös MATLAB ohjelma jolla ratkaisu voidaan tehdä.

4. Tarkastellaan reuna-arvotettävää $y'' + \lambda y = 0; y(0) = y(1) = 0$.

(a) Johda lauseke toisen derivaatan differenssiapproksimaatiolle ja muodosta tämän avulla reuna-arvotettävän diskreetti muoto pisteissä $x_k = k/(N + 1), k = 1, \dots, N$.

(b) Ratkaise käsin laskien tapauksessa $N = 3$ jakopisteitä $x_j, j = 1, 2, 3$ vastaavat arvot $y_j, j = 1, 2, 3$.

(c) Tee tarkoitukseen sopiva MATLAB ohjelma yleiselle N :n arvolle.

5. Vuorokauden lämpötilamittauksia kuvaavaan dataan

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| x | 0.0 | 2.0 | 4.0 | 6.0 | 8.0 | 10.0 | 12.0 | 14.0 | 16.0 | 18.0 | 20.0 | 22.0 | 24.0 |
| y | 6.3 | 4.0 | 6.6 | 10.9 | 14.6 | 19.1 | 24.3 | 25.7 | 22.9 | 19.5 | 15.9 | 10.3 | 5.4 |

on tarkoitus sovittaa jokin sini-tyyppinen käyrä, jonka jakso on 24 ja joka kulkee ko. pisteistön painopisteen kautta. Miten tekisit tehtävän MATLABilla?

Helsingin yliopisto/Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATEMATIIKAN MENETELMÄKURSSI II
Tentti, 2008-12-17
VASTAA NELJÄÄN TEHTÄVÄÄN!
MATLAB-TEHTÄVÄT SAA TEHDÄ MYÖS MUILLA KIELILLÄ!

1. Tarkastellaan yhtälöryhmää

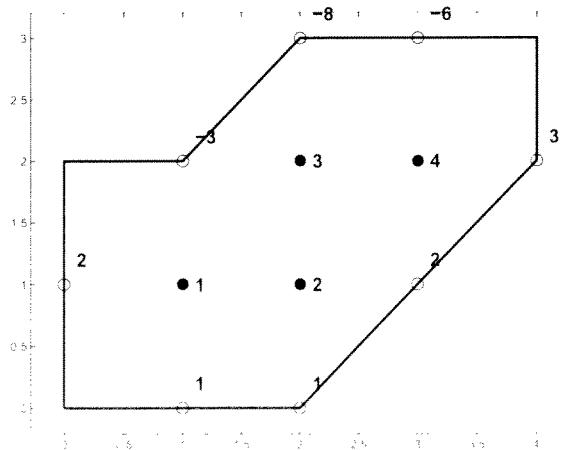
$$\begin{cases} x_1 * x_2 - 3 * x_2 - 4 * x_1 = -12; \\ x_1 * x_2 - 3 * x_1 = 3; \end{cases}$$

- (a) Muodosta Jacobin matriisi.
- (b) Kirjoita Newtonin iteraatiokaava yhtälöryhmän ratkaisemiseksi.
- (c) Aloita iteraatio pisteestä [3,3] ja tee 2 iteraatiota. Kunkin iteraatioaskeleen x_n kohdalla ilmoita $f(x_n)$, $J_f(x_n)$ ja $J_f(x_n)^{-1}f(x_n)$. Tee kaikki laskut käsin.
- (d) Kirjoita lisäksi tarkoitukseen sopiva MATLAB -ohjelma.

2. Ratkaise Dirichletin ongelma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

oheisen kuvan tapauksessa ja indeksoiden tuntemattomat kuvanmukaisin indekseillä 1, ..., 5. Ruudun sivunpituus on 1. Tee kaikki laskut käsin. Esitä lisäksi tarkoitukseen sopiva MATLAB ohjelma.



3. To fit a circle (1) $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$ to n sample pairs of coordinates (x_k, y_k) , $k = 1, \dots, n$ we must determine the center (c_1, c_2) and

the radius r . Now (1) \Leftrightarrow (2) $2xc_1 + 2yc_2 + (r^2 - c_1^2 - c_2^2) = x^2 + y^2$. If we set $c_3 = r^2 - c_1^2 - c_2^2$, then the equation takes the form

$$2xc_1 + 2yc_2 + c_3 = x^2 + y^2.$$

Substituting each data point we get

$$\begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_n & 2y_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 \end{bmatrix}$$

This system can be solved in the usual way for $c = \text{matrix} / \text{rhs}$. Then $r = \sqrt{c_3 + c_1^2 + c_2^2}$. Apply this algorithm for the points generated by

```
r=0.5+0.5*rand(10,1);
theta=2*pi*rand(10,1);
clear x
clear y
x=3*r.*cos(theta) ;
y=3*r.*sin(theta);
```

Plot the data and the circle.

4. Consider the Dirichlet problem in a square with $u(x, 0) = 20$, $u(x, 4) = 180$ for $0 < x < 4$ and $u(0, y) = 80$, $u(4, y) = 0$, for $0 < y < 4$. Explain the SOR method to solve this problem. Write a MATLAB program to solve this problem.

5. Suppose that we have data points (x_j, y_j) , $j = 1, \dots, m$, $m > 5$, and we wish to fit, in the least square sense, to this data a parabola that goes through the point (x_3, y_3) .

(a) Formulate this problem as a least square problem and identify the expression that must be minimized.

(b) Explain what is meant with the term normal equation. Write the normal equations for this problem and solve them exactly.

(c) Write a MATLAB program that could be used to solve this problem.