

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin kurssi
Loppukoe
9.8.2007

1. Todista induktiolla n :n suhteen kaava

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2.$$

2. Millä x :n arvoilla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 x^k}{5^k}$ suppenee?

3. Derivoi funktio $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{2x}$. Tutki f :n monotonisuutta määrittelyjoukkonsa osaväleillä.

4. Määritä funktio $f(x) = |\sin x| + \cos 2x$ suurin ja pienin arvo.

5. Laske raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2+x) - \ln(4-x)}{\sin(\pi x)}$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattinen analyysi
Loppukoe
24.1.2008

1. Millä x :n arvoilla funktio

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 5x| - 1}$$

on derivoituva? Laske $f'(x)$.

2. Osoita, että kaavan $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ määrittelemä kuvaus $f : [0, \infty[\rightarrow]0, 1]$ on bijektio. Määritä käänteisbijektio f^{-1} lauseke.

3. Etsi funktion $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$ lokaalit ääriarvot ja käännekohtat. Millä väleillä f on kasvava? Onko f :llä pienin arvo?

4. Esitä differentiaalilaskennan väliarvolause ja todista sen avulla, että $|\sin(4x) - \sin(4y)| \leq 4|x - y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Millä x :n arvoilla seuraavat sarjat suppenevat

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{x-1}\right)^k$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$?

Määritä sarjojen summafunktiot.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin kurssi
Loppukoe
3.4.3008

1. Todista induktiolla n :n suhteen, että

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx,$$

kun $x \geq -1$ ja $n \in \mathbb{N}$.

2. Funktiosta $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiedetään, että $f(0) = 0$ ja

$$|f(x)| \leq |x^2 \sin \frac{1}{x}|,$$

kun $x \neq 0$.

- a) Osoita, että f on jatkuva origossa.
b) Onko f derivoituva origossa? Perustelu!

3. Millä x :n arvoilla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4x}{3x^2 + 1}\right)^k$ suppenee ja mikä on tällöin sen summafunktio?

4. Millä välillä funktio $f(x) = 7x^5 - 25x^3 + 10x$ on aidosti monotoninen? Montako ratkaisua on yhtälöllä $f(x) = 2$?

5. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(x^2 - 1)}{\ln(xe^{x-1})}.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin kurssi
Loppukoe
12.6.2008

1. Jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ määritellään asettamalla $x_1 = 1$ ja $x_{n+1} = \frac{x_n}{2+x_n}$, kun $n \geq 1$. Osoita induktiolla, että $x_{n+1} < x_n$ kaikilla n . Laske raja-arvo $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
2. Millä x :n arvoilla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2x+1}{x^2+2}\right)^k$ suppenee ja mikä on tällöin sen summa?
3. Tarkastellaan funktiota $f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$.
 - a) Tutki f :n monotonisuutta eri väleillä ja määritä f :n lokaalit ääriarvokohdat.
 - b) Määritä f :n käännekohdat ja laske raja-arvot $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. Määritä f :n suurin ja pienin arvo \mathbb{R} :ssä.
4. Laske $f'(\frac{\pi}{2})$, kun
 - a) $f(x) = e^{\sin x}$, b) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$.
5. Määritä raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-1} - 1}{3x^3 - x^2 - 2x}$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin kurssi
Loppukoe
22.1.2009

1. Osoita induktiolla, että $2^n \geq n^2$, kun n on kokonaisluku ja $n \geq 4$.
2. Millä x :n arvoilla seuraavat sarjat suppenevat:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^n$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n$?
3. Määritä ellipsin $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2$ pisteisiin $(2, \pm 3)$ piirrettyjen tangenttien yhtälöt.
4. Tutki funktiota $f(x) = x^4 + 5x^3 - 23x^2$. Määritä f :n lokaalit ääriarvokohdat ja käännekohdat. Tutki f :n monotonisuutta ja konveksisuutta.
5. Esitä differentiaalilaskennan väliarvolause. Todista sen avulla, että ehdon $f'(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ täyttävä funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on injektio.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin kurssi
Loppukoe
2.4.2009

1. Todista induktiolla, että

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

2. Määritä käsin laskien likiarvo luvulle $\sqrt[3]{999}$ funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ differentiaalikehitelmää pisteessä $x_0 = 1000$ soveltamalla.

3. Etsi funktion $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ lokaalit ääriarvot ja tutki f :n monotonisuutta.

4. Laske $f'(1)$, kun $f(x) = (2x)^x$.

5. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin kurssi
Loppukoe
11.6.2009

1. Määritä $a, b \in \mathbb{R}$ niin, että funktio

$$f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{b\}, f(x) = \frac{x-1}{x+2},$$

on bijektio. Laske $f^{-1}(x)$.

2. Tutki seuraavien sarjojen suppenemista

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2x-1}\right)^k$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^k$.

3. Osoita, että yhtälöllä $x^3 = x+2$ on tasan yksi juuri ja määritä Newtonin menetelmällä juuren 2-desimaalinen likiarvo.

4. Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivaatta toteuttaa ehdon $1 \leq f'(x) \leq 2$. Osoita, että

$$|x-y| \leq |f(x) - f(y)| \leq 2|x-y|$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Anna esimerkki tällaisesta funktiosta f .

5. Osoita, että funktiolla $f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x+5}$ on suurin ja pienin arvo ja määritä ne.