

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Matemaattinen analyysi

25.10.2005

1. Millä arvoilla  $x \in \mathbb{R}$  funktio  $f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x^2 - 3}$  on a) määritelty, b) derivoituva? Laske  $f'(x)$ .
2. Muodosta käyrän  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2$  pisteeseen  $(2, 3)$  kuuluvan tangenttisuoran yhtälö.
3. Millä  $x$ :n arvoilla sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$  suppenee?
4. Laske raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[8]{x^{100} + 1} - 1}{x^{100}}$ .
5. Montako reaaliuurta on yhtälöllä  $7x^5 - 25x^3 + 10x - 2 = 0$ ?

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Matemaattisen analyysin kurssi  
Loppukoe  
26.1.2006

1. Millä  $x$ :n arvoilla reaalfunktio  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$  on

a) Määritelty?

b) Derivoituva?

Muodosta käyrän  $y = f(x)$  pisteeseen  $(3, 2)$  piirretyn tangentin yhtälö.

2. Jono  $x_n$  määritellään kaavoilla  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n}$ . Osoita induktiolla  $n$ :n suhteen, että  $x_n = \frac{1}{n}$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Millä  $x$ :n arvoilla sarja  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{kx}$  suppenee ja mikä on tällöin sen summa?

4. Esitä differentiaalilaskennan väliarvolause ja osoita sen avulla, että  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$  kaikilla  $x, y \in \mathbb{R}$ .

5. Määritä funktion  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 5}$  suurin ja pienin arvo  $\mathbb{R}$ :ssä, jos ne ovat olemassa.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Matemaattisen analyysin kurssi  
Loppukoe  
14.6.2006

1. Mikä on reaalifunktion  $f(x) = \ln(\sqrt{-x^2 + 3x + 4})$  laajin mahdollinen määrittelyväli? Määritä  $f$ :n suurin arvo.
2. Osoita, että funktio  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5 + 3x$ , on bijektio. Määritä  $f$ :n käänteisfunktion derivaatta pisteessä 4.
3. Laske raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(3x^2 - 2x)}{\sin(\pi x)}$ .

4. Osoita väliarvolauseen avulla, että

$$|\arccos \tan x - \arccos \tan y| \leq |x - y| \quad \text{kaikilla } x, y \in \mathbb{R}.$$

5. Tutki sarjan  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} x^k$  suppenemista.

\*\*\*\*\*

1. What is the largest interval, where the real function  $f(x) = \ln(\sqrt{-x^2 + 3x + 4})$  is defined? Determine the greatest value of  $f$ .
2. Prove that the function  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5 + 3x$ , is bijective. Determine the derivative of the inverse function of  $f$  at the point 4.
3. Compute the limit  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(3x^2 - 2x)}{\sin(\pi x)}$ .

4. Make use of the mean value theorem of differential calculus to prove that

$$|\arccos \tan x - \arccos \tan y| \leq |x - y| \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}.$$

5. Examine the convergence of the series  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} x^k$ .

1. Todista induktiolla  $n$ :n suhteen, että  $(1+x)^n \geq 1+nx$ , kun  $n \in \mathbb{N}$  ja  $x > -1$ .

2. Millä  $x$ :n arvoilla sarja  $\sum_{k=1}^{\infty} (x^2 - 2x)^k$  suppenee ja mikä on tällöin sen summa?

3. Tarkastellaan funktiota  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5 + 2x - 1$ .

a) Osoita, että  $f$  on bijektio.

b) Laske  $f$ :n käänteisfunktion derivaatta pisteessä 2.

4. Onko funktiolla  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$  suurinta tai pienintä arvoa, kun  $x \in ]0, 2[$ ?

5. Laske raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{x^3 - 7x + 6}$ .

\*\*\*\*\*

1. Prove, by induction on  $n$ , that  $(1+x)^n \geq 1+nx$ , where  $n \in \mathbb{N}$  and  $x > -1$ .

2. For which values of  $x$  does the series  $\sum_{k=1}^{\infty} (x^2 - 2x)^k$  converge and what is then its sum?

3. Consider the function  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5 + 2x - 1$ .

a) Prove that  $f$  is bijective.

b) Compute the derivative of the inverse function of  $f$  at the point 2.

4. Does the function  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$  have a largest or a smallest value for  $x \in ]0, 2[$ ?

5. Compute the limit  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{x^3 - 7x + 6}$ .

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Matemaattisen analyysin kurssi  
Loppukoe  
24.10.2006

1. Todista induktiolla  $n$ :n suhteen, että

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Millä  $x$ :n arvoilla sarja  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-2x}{7}\right)^k$  suppenee ja mikä on tällöin sen summa?

3. Määritä raja-arvot

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - n^3}{3n^4 + n}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+x)}$ .

4. Määritä  $a \in \mathbb{R}$  niin, että funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & x \leq 1 \\ x^3 + 2x, & x > 1 \end{cases}$$

on jatkuva koko  $\mathbb{R}$ :ssä.

5. Määritä funktion  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$  suurin ja pienin arvo välillä  $[0, 6]$ .

1. Todista induktiolla  $n$ :n suhteen, että

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Millä  $x$ :n arvoilla sarja

$$1 + \frac{x}{x-1} + \left( \frac{x}{x-1} \right)^2 + \left( \frac{x}{x-1} \right)^3 + \dots$$

suppenee ja mikä on tällöin sen summa?

3. Etsi funktion  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  lokaalit ääriarvot ja käännepisteet. Onko  $f$ :llä suurinta tai pienintä arvoa  $\mathbb{R}$ :ssä?
4. Tutki funktion  $f(x) = x^3 - 3x - 5$  monotonisuutta. Montako reaalijuurta on yhtälöllä  $f(x) = 0$ ? Etsi jonkin juuren 3-desimaalinen likiarvo.
5. Laske raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x^2-9} - x + 2}{\ln(3x-8)}$ .

\*\*\*\*\*

1. Prove, by induction on  $n$ , that

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

2. For which values of  $x$  does the series

$$1 + \frac{x}{x-1} + \left( \frac{x}{x-1} \right)^2 + \left( \frac{x}{x-1} \right)^3 + \dots$$

converge and what is then its sum?

3. Find the local extreme values and the inflection points of the function  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ . Does  $f$  have a largest or a smallest value?
4. Examine the monotonicity of the function  $f(x) = x^3 - 3x - 5$ . How many real roots does the equation  $f(x) = 0$  have? Find a 3-decimal approximation of some root.
5. Compute the limit  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x^2-9} - x + 2}{\ln(3x-8)}$ .

1. Osoita induktiolla, että kaikilla  $n \in \mathbb{N}$  pätee kaava  $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ .
2. Määritä  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ , kun tiedetään, että

$$\frac{x^2 + x}{3x^2 + 1} \leq f(x) \leq \frac{x^5 + x^4}{3x^5 + \sin x} \quad \forall x \geq 1$$

- 3.a) Esitä geometrisen sarjan teoriaa käyttäen päättymätön jaksollinen (jakso 267) desimaaliluku  $a = 0.3267267(267) \dots$  kahden kokonaisluvun osamääränä.

- b) Millä  $x$ :n arvoilla sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} x^n$  suppenee?

4. Tutki funktion  $f(x) = xe^{-x}$  monotonisuutta derivaatan avulla. Määritä  $f$ :n suurin arvo  $\mathbb{R}$ :ssä. Onko  $f(x)$ :llä pienintä arvoa arvoilla  $x > 0$ ?

5. Laske raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\ln \left( \frac{5x-5}{x^2+1} \right)}$ .

1. For which values of  $x$  is the real function  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$

- a) defined?
- b) differentiable?

Form the equation of the tangent line of the curve  $y = f(x)$  at the point  $(3, 2)$ .

2. The sequence  $x_n$  is defined by the formulae  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$ . Prove, by induction of  $n$ , that  $x_n = \frac{1}{n}$  for all  $n \in \mathbb{N}$ .

3. For which values of  $x$  does the series  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{kx}$  converge and what is then its sum?

4. Present the mean value theorem of differential calculus and make use of it by proving that  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$  for all  $x, y \in \mathbb{R}$ .

5. Determine the largest and the smallest value in  $\mathbb{R}$  of the function  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 5}$ , if these values exist.



Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Matemaattisen analyysin kurssi  
Loppukoe  
14.6.2007

1. Osoita, että kaavan  $f(x) = \frac{1}{x}$  määrittelemä kuvaus  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  on bijektio. Mikä on sen käänteiskuvauksen lauseke?
2. Millä väleillä funktio  $f(x) = x^4 + 2x^3 + \frac{5}{2}x^2$  on aidosti monotoninen? Määritä  $f$ :n lokaalit ääriarvot.
3. Millä  $x$ :n arvoilla sarja  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{5k}}{2^k}$  suppenee ja mikä on tällöin sen summa?
4. Esitä differentiaalilaskennan väliarvolause ja todista sen avulla, että

$$|\overline{\arctan} x - \overline{\arctan} y| \leq |x - y|$$

kaikilla  $x, y \in \mathbb{R}$ .

5. Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-1} - 1}{\sin \pi x}.$$