

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Matemaattisen analyysin jatkokurssi  
Loppukoe  
14.8.2008

1. Tutki integraalien

a)  $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$  ja

b)  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$

suppenemista.

2. Laske tasointegraali  $\iint_A \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy$ , kun  $A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$ .

3. Tarkastellaan funktiota  $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$  pisteen  $(1, 1)$  lähellä.

a) Mihin suuntaan  $f$  kasvaa nopeimmin pisteessä  $(1, 1)$ ?

b) Onko  $f$  konvekssi pisteen  $(1, 1)$  ympäristössä?

4. Määritä funktion  $f(x, y) = xy$  suurin ja pienin arvo käyrällä  $3x^2 + 4y^2 = 7$ .

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' + \frac{y}{x} = x$$

alkuehdolla  $y(1) = 1$ .

\*\*\*\*\*

1. Examine the convergence of the following integrals:

a)  $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$ , b)  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$ .

2. Compute  $\iint_A \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy$ , where  $A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$ .

3. Consider the function  $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$  near the point  $(1, 1)$ .

a) Into what direction does  $f$  increase most at  $(1, 1)$ ?

b) Is  $f$  convex in some neighborhood of  $(1, 1)$ ?

4. Determine the greatest and the smallest value of the function  $f(x, y) = xy$  on the curve  $3x^2 + 4y^2 = 7$ .

5. Solve the differential equation  $y' + \frac{y}{x} = x$  with the initial value condition  $y(1) = 1$ .

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Matemaattisen analyysin jatkokurssi  
Loppukoe  
19.5.2009

- Laske
  - $\int x^2 e^{-5x} dx$
  - $\int \frac{x dx}{x^2 + 6x - 16}$
- Laske  $\iiint_V y dx dy dz$ , kun  $V = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ ja } x + y + z \leq 2\}$ .
- Etsi käyrän  $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$  origoa lähimmät ja etäisimmät pisteet.
- Osoita, että funktio  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$  on konkaavi joukossa

$$A = \{(x, y) \mid x \leq -\frac{1}{2}, y \leq -\frac{1}{2}\}.$$

Etsi  $f$ :n suurin arvo joukossa  $A$ .

- Ratkaise differentiaaliyhtälö  $y' + 3x^2 y = 12x^2$  alkuehdolla
  - $y(1) = 5$
  - $y(1) = 4$ .

\*\*\*\*\*

- Compute
  - $\int x^2 e^{-5x} dx$
  - $\int \frac{x dx}{x^2 + 6x - 16}$
- Compute  $\iiint_V y dx dy dz$ , when  $V = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ and } x + y + z \leq 2\}$ .
- Find the points on the curve  $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$  that are closest to and farthest away from the origin.
- Show that the function  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$  is concave in the set

$$A = \{(x, y) \mid x \leq -\frac{1}{2}, y \leq -\frac{1}{2}\}.$$

Find the largest value of  $f$  in  $A$ .

- Solve the differential equation  $y' + 3x^2 y = 12x^2$  with the initial condition
  - $y(1) = 5$
  - $y(1) = 4$ .

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Matemaattisen analyysin jatkokurssi  
Loppukoe  
11.6.2009

1. Laske  $\int \frac{x dx}{(x+1)^2(x-1)}$ .
2. Laske  $\iint_A x^2 dx dy$ , kun  $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ .
3. Tarkastellaan funktiota  $f(x, y) = -x^4 - y^2 + 3y$ .
  - a) Osoita, että  $f$  on konkaavi  $\mathbb{R}^2$ :ssa ja etsi sen suurin arvo.
  - b) Mihin suuntaan  $f$  kasvaa nopeimmin pisteessä  $(3, 4)$ ?
4. Etsi funktion  $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 6y$  pienin arvo joukossa

$$A = \{(x, y) \mid x + 3y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

5. Määritä käyrän  $x^6 + y^6 = 1$  suurin ja pienin etäisyys origosta.

\*\*\*\*\*

1. Compute  $\int \frac{x dx}{(x+1)^2(x-1)}$ .
2. Compute  $\iint_A x^2 dx dy$ , where  $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ .
3. Consider the function  $f(x, y) = -x^4 - y^2 + 3y$ .
  - a) Prove that  $f$  is concave in  $\mathbb{R}^2$  and find its maximum value.
  - b) To what direction does  $f$  increase most at the point  $(3, 4)$ ?
4. Find the smallest value of the function  $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 6y$  in the set

$$A = \{(x, y) \mid x + 3y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

5. Determine the smallest and the largest distance from the origin on the curve  $x^6 + y^6 = 1$ .