

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin jatkokurssi
Loppukoe
9.8.2007

1. Käyrä $y = \sqrt{x \sin x}$, $0 \leq x \leq \pi$, pyörrähtää x -akselin ympäri. Laske syntyneen pyörrähdyskappaleen tilavuus.
2. Olkoon $f(x, y) = x^2y + 3xy^3$. Mihin suuntaan f kasvaa nopeimmin pisteessä $(1, -1)$? Muodosta f :n kokonaisdifferentiaali pisteessä $(1, -1)$.
3. Määritä funktion $f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 - 6y$ suurin ja pienin arvo joukossa

$$A = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 4\}.$$

4. Laske $\iint_A x^2 dx dy$, kun $A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.
5. Ratkaise differentiaaliyhtälö $3y'' + 8y' - 28y = e^x$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin jatkokurssi
Loppukoe
4.3.2008

1. Laske $\int e^{2x} \sin x \, dx$ osittaisintegroinnin avulla.
2. Laske tasointegraali $\iint_A (x + \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy$, kun $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.
3. Määritä funktion $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2$ suurin ja pienin arvo joukossa

$$A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq \frac{1}{2}x\}.$$

4. Määritä origon etäisyys tasojen $x + y + z = 3$ ja $x + 2y + 2z = 4$ leikkaussuorasta Lagrangen menetelmällä.
5. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' - 7y' + 6y = x.$$

Mikä ratkaisufunktioista toteuttaa alkuehdot $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$?

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin jatkokurssi
Loppukoe
20.5.2008

1. Laske osittaisintegroinnilla $\int x^2 \cos 2x \, dx$.
2. Laske $\iint_A x \, dx dy$, kun $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ ja } x \geq 0\}$.
3. Tarkastellaan funktiota $f(x, y) = x^3 y + x^2 + y^2 - y$.
 - a) Mihin suuntaan f kasvaa nopeimmin pisteessä $(1, 2)$?
 - b) Tutki f :n konveksisuutta pisteen $(1, 2)$ ympäristössä.
4. Määritä funktion $f(x, y) = 2x - y$ suurin ja pienin arvo käyrällä

$$C = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 = 5\}.$$

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + xy = x^3$ alkuehdolla $y(0) = 0$.

1. Tutki integraalien

a) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$ ja

b) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$

suppenemista.

2. Laske tasointegraali $\iint_A \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy$, kun $A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$.

3. Tarkastellaan funktiota $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$ pisteen $(1, 1)$ lähellä.

a) Mihin suuntaan f kasvaa nopeimmin pisteessä $(1, 1)$?

b) Onko f konvekssi pisteen $(1, 1)$ ympäristössä?

4. Määritä funktion $f(x, y) = xy$ suurin ja pienin arvo käyrällä $3x^2 + 4y^2 = 7$.

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' + \frac{y}{x} = x$$

alkuehdolla $y(1) = 1$.

1. Examine the convergence of the following integrals:

a) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$, b) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$.

2. Compute $\iint_A \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy$, where $A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$.

3. Consider the function $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$ near the point $(1, 1)$.

a) Into what direction does f increase most at $(1, 1)$?

b) Is f convex in some neighborhood of $(1, 1)$?

4. Determine the greatest and the smallest value of the function $f(x, y) = xy$ on the curve $3x^2 + 4y^2 = 7$.

5. Solve the differential equation $y' + \frac{y}{x} = x$ with the initial value condition $y(1) = 1$.

Matematiikan laitos
Matemaattisen analyysin jatkokurssi
Loppukoe
12.11.2008

1. Laske osittaisintegroinnilla
a) $\int x^2 \sin x \, dx$ ja b) $\int e^{3x} \cos 4x \, dx$.

2. Laske $\iint_A (3x + 2y) \, dx \, dy$, kun
a) $A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$
b) $A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

3. Mihin suuntaan funktio

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 4xy + xye^{2z}$$

kasvaa nopeimmin pisteessä $(1, -1, 0)$? Muodosta f :n kokonaisdifferentiaali tässä pisteessä.

4. Etsi funktion $f(x, y) = 8x^3 - 24xy + y^3$ lokaalit ääriarvot.

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' + 3y' - 4y = x$$

alkuehdoilla $y(0) = y'(0) = 1$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
 Matemaattisen analyysin jatkokurssi
 Loppukoe
 19.5.2009

- Laske
 - $\int x^2 e^{-5x} dx$
 - $\int \frac{x dx}{x^2 + 6x - 16}$
- Laske $\iiint_V y dx dy dz$, kun $V = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ ja } x + y + z \leq 2\}$.
- Etsi käyrän $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ origoa lähimmät ja etäisimmät pisteet.
- Osoita, että funktio $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ on konkaavi joukossa

$$A = \{(x, y) \mid x \leq -\frac{1}{2}, y \leq -\frac{1}{2}\}.$$

Etsi f :n suurin arvo joukossa A .

- Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + 3x^2 y = 12x^2$ alkuehdolla
 - $y(1) = 5$
 - $y(1) = 4$.

- Compute
 - $\int x^2 e^{-5x} dx$
 - $\int \frac{x dx}{x^2 + 6x - 16}$
- Compute $\iiint_V y dx dy dz$, when $V = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ and } x + y + z \leq 2\}$.
- Find the points on the curve $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ that are closest to and farthest away from the origin.
- Show that the function $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ is concave in the set

$$A = \{(x, y) \mid x \leq -\frac{1}{2}, y \leq -\frac{1}{2}\}.$$

Find the largest value of f in A .

- Solve the differential equation $y' + 3x^2 y = 12x^2$ with the initial condition
 - $y(1) = 5$
 - $y(1) = 4$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin jatkokurssi
Loppukoe
11.6.2009

1. Laske $\int \frac{x dx}{(x+1)^2(x-1)}$.
2. Laske $\iint_A x^2 dx dy$, kun $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.
3. Tarkastellaan funktiota $f(x, y) = -x^4 - y^2 + 3y$.
 - a) Osoita, että f on konkaavi \mathbb{R}^2 :ssa ja etsi sen suurin arvo.
 - b) Mihin suuntaan f kasvaa nopeimmin pisteessä $(3, 4)$?
4. Etsi funktion $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 6y$ pienin arvo joukossa

$$A = \{(x, y) \mid x + 3y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

5. Määritä käyrän $x^6 + y^6 = 1$ suurin ja pienin etäisyys origosta.

1. Compute $\int \frac{x dx}{(x+1)^2(x-1)}$.
2. Compute $\iint_A x^2 dx dy$, where $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.
3. Consider the function $f(x, y) = -x^4 - y^2 + 3y$.
 - a) Prove that f is concave in \mathbb{R}^2 and find its maximum value.
 - b) To what direction does f increase most at the point $(3, 4)$?
4. Find the smallest value of the function $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 6y$ in the set

$$A = \{(x, y) \mid x + 3y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

5. Determine the smallest and the largest distance from the origin on the curve $x^6 + y^6 = 1$.