

Matemaattisen analyysin jatkokurssi
Ylimääräinen loppukoe
14.4.2005

1. Olkoon $f(x, y) = \frac{3x^2 + 4y^2}{x^2 + 2y^2}$. Osoita, ettei ole olemassa raja-arvoa $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.
2. Olkoon $f(x, y) = 5x^2 + 7xy - y^3$.
 - a) Laske f :n osittaisderivaatat.
 - b) Muodosta f :n kokonaisdifferentiaali pisteessä $(1, -1)$.
3. Etsi funktion $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 + y$ lokaalit ääriarvokohtat. Määritä myös f :n suurin ja pienin arvo joukossa

$$A = \{(x, y) \mid -4 \leq x \leq -2, 3 \leq y \leq 5\}.$$

4. Piirrä xy -tasoon joukko

$$A = \{(x, y) \mid \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

ja laske $\iint_A y dx dy$.

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' + \frac{y}{x} = 1$$

alkuehdolla $y(1) = 0$.

- Muodosta funktion $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ gradientti ja kokonaisdifferentiaali pisteessä $(3, 4)$.
- Tutki seuraavien funktioiden konveksisuutta tasossa \mathbb{R}^2
 a) $f(x, y) = -x + y + y^2$, b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
- Määritä funktion

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2y - 12z$$

paikalliset ääriarvot. Onko f :llä suurinta tai pienintä arvoa koko \mathbb{R}^3 :ssa?

- Laske avaruusintegraali $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$, kun $f(x, y, z) = xyze^z$ ja

$$A = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}.$$

- Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' + \frac{1}{x}y = 1$$

alkuehdolla $y(1) = 2$.

- Form the gradient and the total differential of the function $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ at the point $(3, 4)$.
- Examine the convexity of the following functions in \mathbb{R}^2 :
 a) $f(x, y) = -x + y + y^2$, b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
- Determine the local extreme points of the function $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2y - 12z$. Does f have a largest or a smallest value in \mathbb{R}^3 ?
- Compute the space integral $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$, where $A = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$ and $f(x, y, z) = xyze^z$.
- Solve the differential equation $y' + \frac{1}{x}y = 1$ with the initial value condition $y(1) = 2$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Matemaattisen analyysin jatkokurssi
Loppukoe 7. 3. 2006

1. Laske $\int x^2 \sin 2x \, dx$.
2. Tarkastellaan funktiota $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
 - a) Onko f jatkuva origossa?
 - b) Laske f :n osittaisderivaatat kaikissa pisteissä, joissa ne ovat olemassa.
3. Etsi funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ suurin ja pienin arvo joukossa
$$A = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 2 - x^2 \leq y \leq 3\}.$$
4. Laske tasointegraali $\iint_A x \, dx \, dy$, kun $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$.
5. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = \sqrt{xy}$ alkuehdolla $y(2) = 2$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin jatkokurssi
Loppukoe
18.5.2006

1. Laske $\int_0^{\infty} x e^{-2x^2} dx$.
2. Muodosta pinnan $z = xy$ pisteeseen $(1, 1, 1)$ kuuluvan tangenttitason yhtälö.
3. Etsi funktion $f(x, y) = 5x - 4y$ suurin ja pienin arvo ellipsillä $3x^2 + 4y^2 = 1$.
4. Laske $\iint_A y \, dx dy$, kun $A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$.
5. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' + 7y' + 6y = 1$$

alkuehdoilla $y(0) = y'(0) = 0$.

1. Compute $\int_0^{\infty} x e^{-2x^2} dx$.
2. Form the equation of the tangent plane of the surface $z = xy$ at the point $(1, 1, 1)$.
3. Find the largest and the smallest value of the function $f(x, y) = 5x - 4y$ on the ellipse $3x^2 + 4y^2 = 1$.
4. Compute $\iint_A y \, dx dy$, where $A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$.
5. Solve the differential equation $y'' + 7y' + 6y = 1$ with the initial value conditions $y(0) = y'(0) = 0$.

1. Muodosta funktion $f(x, y) = e^{x^2y} + x^3$ kokonaisdifferentiaali pisteessä $(1, 0)$.
2. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 - 2x + 1$. Tutki, onko f :llä pienintä tai suurinta arvoa.
3. Määritä funktion $f(x, y) = 4x - 5y$ pienin ja suurin arvo ellipsillä $9x^2 + 4y^2 = 36$.
4. Laske $\iiint_V e^x xy^2 z^3 dx dy dz$, kun

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}.$$

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = xy$ alkuehdolla $y(1) = 2$

1. Form the total differential of the function $f(x, y) = e^{x^2y} + x^3$ at the point $(1, 0)$.
2. Consider the function $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 - 2x + 1$. Does f have a smallest or a largest value?
3. Determine the smallest and the largest value of the function $f(x, y) = 4x - 5y$ on the ellipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.
4. Compute $\iiint_V e^x xy^2 z^3 dx dy dz$, where

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}.$$

5. Solve the differential equation $y' = xy$ with the initial value condition $y(1) = 2$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Matemaattisen analyysin jatkokurssi

Loppukoe 7. 3. 2006

1. Laske $\int x^2 \sin 2x \, dx$.

2. Tarkastellaan funktiota $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

a) Onko f jatkuva origossa?

b) Laske f :n osittaisderivaatat kaikissa pisteissä, joissa ne ovat olemassa.

3. Etsi funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ suurin ja pienin arvo joukossa

$$A = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 2 - x^2 \leq y \leq 3\}.$$

4. Laske tasointegraali $\iint_A x \, dx \, dy$, kun $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$.

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = \sqrt{xy}$ alkuehdolla $y(2) = 2$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin jatkokurssi
Loppukoe
16.11.2006

1. Laske $\int x^2 e^{3x} dx$.
2. Tarkastellaan funktiota $f(x, y) = \frac{x^2 + y^4}{x^2 + y^2}$.
 - a) Onko f :llä raja-arvoa origossa?
 - b) Laske f :n osittaisderivaatat.
3. Etsi funktion $f(x, y) = xy$ suurin ja pienin arvo joukossa

$$A = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}.$$

4. Laske $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$, kun

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}.$$

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö $xy' = 3y^2$ alkuehdolla $y(1) = \frac{1}{3}$.

1. Compute $\int x^2 e^{3x} dx$.
2. Consider the function $f(x, y) = \frac{x^2 + y^4}{x^2 + y^2}$.
 - a) Does f have a limit at the origin?
 - b) Compute the partial derivatives of f .
3. Find out the largest and the smallest value of the function $f(x, y) = xy$ in the set

$$A = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}.$$

4. Compute $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$, where

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}.$$

5. Solve the differential equation $xy' = 3y^2$ with the initial value condition $y(1) = \frac{1}{3}$.

Matematiikan ja tilastötieteen laitos
Matemaattisen analyysin jatkokurssi
Loppukoe
6.3.2007

1. Määritä funktion $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ raja-arvo origossa ja laske f :n osittaisderivaatat.
2. Tarkastellaan funktiota $f(x, y) = y^2 - x^2$.
 - a) Onko f :llä lokaaleja ääriarvoja?
 - b) Määritä f :n suurin ja pienin arvo joukossa $A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x^2\}$.
3. Etsi funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ suurin ja pienin arvo joukossa

$$A = \{(x, y) \mid 17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100\}.$$

4. Laske tasointegraali $\iint_A e^{x^2} dx dy$, kun

$$A = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2x\}.$$

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = xye^x$ alkuehdolla
 - a) $y(1) = 0$
 - b) $y(0) = 1$.

1. Laske $\int x \ln x \, dx$.
2. Muodosta pinnan $xy^2z^3 = 2$ pisteeseen $(2, 1, 1)$ kuuluvan tangenttitason yhtälö.
3. Etsi funktion $f(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$
 - a) lokaalit ääriarvot
 - b) suurin ja pienin arvo joukossa

$$A = \{(x, y) \mid -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}, -3 \leq y \leq -1\}.$$

4. Laske integraali $\iint_A x \, dx dy$, kun

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}.$$

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' + 7y' + 6y = x$$

alkuehdoilla $y(0) = y'(0) = 1$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin jatkokurssi
Loppukoe
14.6.2007

1. Laske $\int e^{3x} \cos 4x \, dx$ osittaisintegroinnin avulla.
2. Muodosta pinnan $z + xy^3 = 2$ pisteeseen $(1, 1, 1)$ liittyvän tangenttitason yhtälö.
3. Määritä origon $(0, 0, 0)$ pienin etäisyys pinnasta $z^2 = x^2y + 4$.
4. Laske joukon $A = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ tilavuus.
5. Ratkaise differentiaaliyhtälöt
 - a) $y' = xy$ja
 - b) $y'' - 2y' - 3y = 0$.