Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattinen tilastotiede
Loppukoe
25.5.2004

1. Olkoon $\boldsymbol{x}$ kaksikomponenttinen satunnaisvektori, jolla on kovarianssimatriisi $\Sigma = [\sigma_{ik}]$. Osoita, että $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ ja $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ ovat korreloimattomia jos ja vain jos $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ (siis riippumatta kovarianssista σ_{12}).

2. Valmistusprosessi tuottaa kuituja, joiden pituudet vaihtelevat. Pituuden oletetaan olevan jatkuva satunnaismuuttuja tiheysfunktionaan

$$f(x;\theta) = \theta^{-2} x e^{-x/\theta}, \qquad x > 0,$$

missä $\theta > 0$ on tuntematon parametri. Olkoon $\boldsymbol{x}^n = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ otos tästä jakaumasta. Johda
   (i) täydellinen tyhjentävä tunnusluku,
   (ii) parametrin θ pienimmän varianssin harhaton estimaattori.

3. Satunnaisvektori $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3)'$ noudattaa normaalista lineaarista mallia odotusarvoin $E\boldsymbol{y}_1 = 2\beta_1$, $E\boldsymbol{y}_2 = \beta_1 + \beta_2$ ja $E\boldsymbol{y}_3 = \beta_1 - \beta_2$ sekä varianssein σ^2. Johda hypoteesin H_0: $\beta_2 = 0$ uskottavuusosamäärätesti kokoa $1 - \alpha$ vaihtoehtoa H_1: $\beta_2 \neq 0$ vastaan.

4. Kaksi lautakuntaa, A ja B, arvosteli toisistaan riippumattomasti n tenttiin osallistuvan paperit. Oletetaan että osallistujat ovat otos ja heillä on menestymistodennäköisyydet

		B	
		hyväksyy	hylkää
A	hyväksyy	θ_{11}	θ_{12}
	hylkää	θ_{21}	θ_{22}

Olkoot $\boldsymbol{x}_{ik}$, $i, k = 1, 2$ neljän luokan frekvenssit. Tehtävänä on testata hypoteesi $\theta_{21} + \theta_{22} = \theta_{12} + \theta_{22}$ että lautakuntien hylkäämistodennäköisyyksillä ei ole eroa, eli hypoteesi $H_0 : \theta_{21} = \theta_{12}$, vaihtoehtoa $H_1 : \theta_{21} \neq \theta_{12}$ vastaan.
   (i) Kirjoita testausongelman

$$H_0' : \theta_{ik} \underset{i,k}{\equiv} \theta_{ik}^0,$$
$$H_1' : \theta_{ik} \underset{i,k}{\not\equiv} \theta_{ik}^0$$

χ^2-testitunnusluku. *[Johtoa ei tarvitse suorittaa.]*
   (ii) Osoita että ongelman H_0 vs. H_1 χ^2-testitunnusluku on

$$\chi^2 = \frac{(\boldsymbol{x}_{21} - \boldsymbol{x}_{12})^2}{\boldsymbol{x}_{21} + \boldsymbol{x}_{12}}.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto.

Matemaattinen tilastotiede (Valkeila).

Loppukoe 10.8. 2004.

1. Olkoon X Poisson(μ)- jakautunut mitan $\mathbb{P}$ suhteen ja mitan Q suhteen satunnaismuuttujan X jakauma on Poisson(η). Laske
$$I(\mathbb{P}, Q) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \log \frac{d\mathbb{P}}{dQ}.$$
2. Olkoot $X_1, \ldots, X_n$ riippumattomia havaintoja jakaumasta, jolla on tiheysfunktio $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}$. Hae parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{\theta}_n$ ja näytä että $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ on asumptoottisesti normaalinen. Määrää rajajakauman asymptoottinen varianssi.
3. Olkoot $X_1, \ldots, X_n$ riippumattomia havantoja jakaumasta Bin (m, θ), missä m on tunnettu vakio, ja $\theta \in (0, 1)$ on tuntematon parametri. Selvitä, mitkä ovat termit $V(X_k; \theta)$ ja $I(\theta)$ kehitelmässä
$$\log z_n(\theta + u/\sqrt{n}, \theta) = \frac{1}{\sqrt{n}} u \sum_{k=1}^{n} V(X_k; \theta) - \frac{1}{2} u^2 I(\theta) + o_{\mathbb{P}^\theta}(1).$$
4. Olkoon $\mathbb{E}_\theta X = \theta$, $\mathrm{Var}_\theta(X) = \sigma^2(\theta)$ ja satunnaismuuttujan X jakaumaperhe on L^2-derivoituva. Näytä, että $\sigma^2(\theta) \geq \frac{1}{I(\theta)}$, missä $I(\theta)$ on Fisherin informaatio. Olkoon $X_1, \ldots, X_n$ otos tästä jakaumasta. Laske momenttiestimaattorin $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ ja suurimman uskottavuuden estimattorin $\hat{\theta}_n$ suhteellinen tehokkuus [voit olettaa että $\hat{\theta}_n$ on tarkentuva ja asymptoottisesti normaalinen].