Matemaattinen logiikka

Loppukoe

9.8.2007

1. Mitkä ovat struktuurin $(\mathbf{Z}, \{(2z, 2z+1) | \ z \in \mathbf{Z}\})$ määriteltävät osajoukot.

2. Todista käyttämättä täydellisyyslausetta, että
$\vdash \exists v_0 \neg R(v_0) \to \neg \forall v_0 R(v_0)$.

3. Päteekö: $\vdash \exists v_0 (R(v_0) \to \forall v_0 R(v_0))$?

4. Näytä suoraan primitiivirekursiivisen funktion määritelmään vetoamalla, että funktio $f(x) = 2^x$ on primitiivirekursiivinen.

5. Näytä suoraan primitiivirekursiivisen funktion määritelmään vetoamalla, että funktio $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ ja $g(x+2) = g(x) + g(x+1)$ on primitiivirekursiivinen. Tehtävässä voi pitää tunnettuna, että funktiot π, ρ ja σ ovat primitiivirekursiivisia.

Matemaattinen logiikka

Loppukoe

18.12.2007

1. Olkoon $M = (\mathbf{Q}, S, 0)$, missä $\mathbf{Q}$ on rationaalilukujen joukko ja $S : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ on sellainen etta $S(x) = x + 1$ kaikilla $x \in \mathbf{Q}$.
(i) Onko 5 määriteltävä struktuurissa M?
(ii) Onko $1/3$ määriteltävä struktuurissa M?

2. Todista käyttämättä täydellisyyslausetta, että
$\vdash \forall v_0 R(v_0, v_0) \to \forall v_0 \exists v_1 R(v_0, v_1)$.

3. Päteekö: $\vdash \forall v_0 \exists v_1 R(v_0, v_1) \to \exists v_0 R(v_0, v_0)$?

4. Näytä suoraan primitiivirekursiivisen funktion määritelmään vetoamalla, että funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on primitiivirekursiivinen kun $f(x) = 1$ jos x on pariton ja $f(x) = 0$ muuten.

5. Todista Gödelin kiintopistelause.

Matemaattinen logiikka

3.4.2008

Loppukoe

1. Olkoon $M = (\mathbf{Q}, S, 0)$, missä $\mathbf{Q}$ on rationaalilukujen joukko ja $S : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ on sellainen etta $S(x) = x + 1$ kaikilla $x \in \mathbf{Q}$.
(i) Onko 5 määriteltävä struktuurissa M?
(ii) Onko 1/3 määriteltävä struktuurissa M?

2. Näytä (käyttämättä täydellisyyslausetta), että

$$\{P_0(v_0), \forall v_0 \forall v_1 (v_0 = v_1)\} \vdash \forall v_1 P_0(v_1).$$

3. Päteekö: $\vdash \exists v_0(P(v_0) \to \forall v_0 P(v_0))$?

4. Olkoon $M = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, exp, \leq, f, g)$, missä $\leq$ on luonnollisten lukujen tavallinen järjestys, $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ on sellainen, että $f(m, i) = (m)_i$ ja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sellainen, että $g(m) = len(m)$. Oletetaan, että $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on määriteltävä struktuurissa M. Näytä, että funktio $h' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h'(n) = h^n(0)$ on määriteltävä struktuurissa M, missä $h^0 = id$ ja $h^{n+1} = h \circ h^n$.

5. Näytä suoraan rekursiivisen funktion ja relaation määritelmään vetoamalla, että alkulukujen joukko on rekursiivinen.

Matemaattinen logiikka
12.6.2008
Loppukoe

1. Oletetaan, että $\vdash \phi \to \psi$. Näytä kayttämättä täydellisyyslausetta, että

$$\vdash \exists v_0 \phi \to \exists v_0 \psi.$$

2. Päteekö: $\vdash \forall v_0 (R(v_0) \to \forall v_0 R(v_0))$?

3. Näytä suoraan primitiivirekursiivisen funktion määritelmään vetoamalla, että funktio $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ ja $g(x+2) = g(x) + g(x+1)$ on primitiivirekursiivinen. Tehtävässä voi pitää tunnettuna, että funktiot π, ρ ja σ ovat primitiivirekursiivisia.

4. Olkoon $M = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, exp, \leq, f, g)$, missä $\leq$ on luonnollisten lukujen tavallinen järjestys, $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ on sellainen, että $f(m, i) = (m)_i$ ja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sellainen, että $g(m) = len(m)$. Oletetaan, että $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on määriteltävä struktuurissa M. Näytä, että funktio $h' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h'(n) = h^n(0)$ on määriteltävä struktuurissa M, missä $h^0 = id$ ja $h^{n+1} = h \circ h^n$.

5. Todista Tarskin lause. Tehtävässä voi pitää Gödelin kiintopistelausetta tunnettuna.

Matemaattinen logiikka

14.8.2008

Loppukoe

1. Olkoon $M = (\{0,1,2,3\}, R)$, missä $R = \{(0,1),(0,2),(1,3),(2,3)\}$. Etsi struktuurin M määriteltävät alkiot.

2. Todista käyttämättä täydellisyyslausetta, että

$$\{\forall v_0(\phi \to \psi)\} \vdash (\neg\psi \to \forall v_0 \neg\phi),$$

kun v_0 ei esiinny vapaana kaavassa ψ.

3. Olkoon F 1-paikkainen funktiosymboli ja $L = \{F\}$. Olkoon T L-teoria, joka koostuus seuraavista lauseista:

$\forall v_0(\neg F(v_0) = v_0 \wedge F(F(v_0)) = v_0)$

ja

$\forall v_0 ... \forall v_n \exists v_{n+1}(\neg v_{n+1} = v_0 \wedge \neg v_{n+1} = v_1 \wedge ... \wedge \neg v_{n+1} = v_n)$, kaikilla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Näytä, että T on täydellinen.

4. Olkoon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sellainen, että $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ ja $f(n+2) = f(n) + f(n+1)$. Näytä suoraan rekursiivisen funktion määritelmään vetoamalla että f on rekursiivinen. Tehtävässä voi pitää tunnettuna, että funktiot $(m,i) \mapsto (m)_i$ ja $m \mapsto len(m)$ ovat rekursiivisia.

5. Todista Lindenbaumin lemma.

Matemaattinen logiikka
21.10.2008
Loppukoe

1. Todista käyttämättä täydellisyyslausetta:

$$\vdash \forall v_0 \phi \to \exists v_0 \phi.$$

2. Päteekö:

$$\{\forall v_0 \exists v_1 (R(v_0, v_1) \to R'(v_0, v_1))\} \vdash \forall v_0 (\exists v_1 R(v_0, v_1) \to \exists v_1 R'(v_0, v_1))?$$

3. Muotoile ja todista Gödelin kiintopistelause.

4. Osoita suoraan määritelmiin vedoten, että $A \subseteq \mathbb{N}$ on rekursiivinen jos sekä A että $\mathbb{N} - A$ ovat rekursiivisesti numeroituvia.

5. Olkoon $M = (\mathbb{N}, +, 0, 1, f, g, \leq)$ stuktuuri, missä $+$ on luonnollisten lukujen yhteenlasku, $\leq$ on luonnollisten lukujen tavallinen järjestys, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on mielivaltainen funktio ja $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ on sellainen, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $m_0, ..., m_n \in \mathbb{N}$ löytyy $p \in \mathbb{N}$ jolla kaikilla $i \leq n$, $g(p, i) = m_i$. Määritellään $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ seuraavasti: $h(0) = 0$ ja $h(x + 1) = f(h(x))$. Näytä, että h on määriteltävä.

Matemaattinen logiikka
16.12.2008
Loppukoe

1. Todista käyttämättä täydellisyyslausetta:

$$\vdash R(c) \rightarrow \exists v_0 R(v_0).$$

2. Oletaan, että M on L-struktuuri, $\forall v_0 \phi$ on L-lause ja että jokaisella $a \in M$ löytyy vakio $c \in L$ jolla $c^M = a$. Näytä, että löytyy $c \in L$ jolla $M \models \phi(c/v_0) \rightarrow \forall v_0 \phi$.

3. Muotoile ja todista Tarskin lause. Tehtävässä voi pitää Gödelin kiintopistelausetta tunnettuna.

4. Olkoon $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sellainen, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ on lukua n aidosti pienempien alkulukujen lukumäärä. Näytä, että f on primitiivirekursiivinen.

5. Olkoon $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \times, 0, 1, \leq, f, g)$ struktuuri, missä $+$, $\times$ ja $\leq$ ovat luonnollisten lukujen tavalliset laskutoimitukset ja järjestys ja $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ ja $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ovat sellaisia, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $a_0, ..., a_{k-1} \in \mathbb{N}$ löytyy $x \in \mathbb{N}$ jolla $g(x) = k$ ja kaikilla $i < k$, $f(x, i) = a_i$. Näytä, että funktio $f(x) = 2^x$ on määriteltävä struktuurissa $\mathcal{N}$.

Matemaattinen logiikka

2.4.2009

Loppukoe

1. Todista käyttämättä propositiologiikan täydellisyyslausetta: $\vdash \neg\neg A \to A$. Tehtävässä voi pitää tunnettuna, että kaikilla propositiolauseilla A ja B, $\vdash \neg A \to (A \to B)$.

2. Näytä, että $\forall v_0 \phi \to \phi(t/v_0)$ on validi kun $SMK(t, v_0, \phi)$ pätee. ($\phi(t/v_0)$ on kaava joka saadaan kaavasta ϕ sijoittamalla t muuttujan v_0 vapaisiin esiintymiin.)

3. Olkoon $\phi = \exists v_1 R(v_0, v_1)$. Näytä, että $\forall v_0 \phi \to \phi(v_1/v_0)$ ei ole validi.

4. Näytä suoraan määritelmään vetoamalla, että funktio $f(x) = 2^x \dot{-} 1$ on primitiivirekursiivinen.

5. Olkoon $N = (\mathbb{N}, +, 0, 1, \leq, f)$ struktuuri, missä $+$ ja $\leq$ ovat luonnollisten lukujen tavallinen yhteenlasku ja järjestys ja $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ on sellainen, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $a_0, ..., a_k \in \mathbb{N}$ löytyy $x \in \mathbb{N}$ jolla kaikilla $i \leq k$, $f(x, i) = a_i$. Näytä, että luonnollisten lukujen kertolasku on määriteltävä struktuurissa N.

Matemaattinen logiikka
11.6.2009
Loppukoe

1. Todista käyttämättä täydellisyyslausetta:

$$\vdash \forall v_0 \phi \to \neg \exists v_0 \neg \phi.$$

Tehtävässä voi pitää tunnettuna, että kaikilla ψ, $\vdash \psi \to \neg\neg\psi$ ja $\vdash \neg\neg\psi \to \psi$.

2. Etsi kaava ϕ ja termi t joilla $\forall v_0 \phi \to \phi(t/v_0)$ ei ole validi.

3. Näytä, että löytyy L_{exp}-lause ϕ jolla $\mathcal{N}_{exp} \models \phi$ jos ja vain jos $PA_{exp} \vdash \neg\phi$.

4. Näytä suoraan määritelmään vetoamalla, että parillisten luonnollisten lukujen joukko on primitiivirekursiivinen.

5. Olkoon $N = (\mathbb{N}, +, 0, 1, \leq, f)$ struktuuri, missä $+$ ja $\leq$ ovat luonnollisten lukujen tavallinen yhteenlasku ja järjestys ja $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ on sellainen, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ löytyy $x \in \mathbb{N}$ jolla kaikilla $i \leq k$, $f(x, i) = a_i$. Näytä suoraan määritelmään vetoamalla, että funktio $f(x) = 2^x$ on määriteltävä struktuurissa N.