Matemaattinen logiikka
20.4.2004
Loppukoe

1. Olkoon $M = (\{0, 1, 2, 3\}, R^M)$, missä $R^M = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$. Mitkä ovat struktuurin M määriteltävät osajoukot? Perustele vastauksesi.

2. Näytä (käyttämättä täydellisyyslausetta), että

$$\{\exists v_0 P_0(v_0), \forall v_0 \forall v_1 (v_0 = v_1)\} \vdash \forall v_1 P_0(v_1).$$

(Vihje: Näytä ensin, että $\{\forall v_0 \forall v_1 (v_0 = v_1)\} \vdash P_0(v_0) \rightarrow P_1(v_1)$.)

3. Muotoile ja todista kompaktisuuslause.

4. Oletetaan, että funktiot $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ja $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ovat rekursiivisia, $\mathrm{rng}(f) \cup \mathrm{rng}(g) = \mathbb{N}$ ja $\mathrm{rng}(f) \cap \mathrm{rng}(g) = \emptyset$, missä $\mathrm{rng}(f) = \{f(x) | \ x \in \mathbb{N}\}$ ja $\mathrm{rng}(g)$ määritellään vastaavasti. Osoita suoraan rekursiivisen funktion määritelmään vedoten, että $\mathrm{rng}(f)$:n karakteristinen funktio on rekursiivinen. Tehtävässä saa käyttää tietoa, että rajoitettu vähennyslasku on rekursiivinen funktio.

5. Osoita suoraan määritelmään vedoten, että funktio $f(n) = \Sigma_{i=0}^{n} i^3$ on määriteltävä struktuurissa $\mathcal{N}_{exp}$. Tehtävässä voidaan pitää tunnettuna, että funktiot $g(a, i) = (a)_i$ ja $h(a) = \mathrm{len}(a)$ ovat määriteltäviä struktuurissa $\mathcal{N}_{exp}$.

Matemaattinen logiikka
18.6.2004
Loppukoe

1. Olkoon $M = (\{0,1,2,3,4\}, R)$, missä $R = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,0)\}$. Mitkä ovat struktuurin M määriteltävät osajoukot?

2. Päteekö:

$$\{\forall v_0 \exists v_1 (R(v_0,v_1) \vee R'(v_0,v_1))\} \vdash \forall v_0 (\exists v_1 R(v_0,v_1) \vee \exists v_1 R'(v_0,v_1))?$$

3. Olkoon F 1-paikkainen funktiosymboli ja aakkosto $L = \{F\}$. Olkoon T L-teoria, joka koostuu seuraavista lauseista:
$\exists v_0 \forall v_1 F(v_1) = v_0$
ja
$\exists v_0 ... \exists v_n (\bigwedge_{i<j\leq n} \neg v_i = v_j)$, kun $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.
Näytä, että T on täydellinen teoria.

4. Osoita suoraan määritelmään vedoten, että funktio $f(x) = 2^x + 2$ on primitiivirekursiivinen.

5. Muotoile ja todista Tarskin lause. Tehtävässä voi pitää Gödelin kiintopistelausetta tunnettuna.

Yllä on käytetty luentojen merkintöjä, esim. $\exists v_0 \forall v_1 F(v_1) = v_0$ on (netti)kirjan merkinnöillä $\exists v_0 \forall v_1 \approx F v_1 v_0$.
Muista perustella vastauksesi.

Matemaattinen logiikka
10.8.2004
Loppukoe

1. Todista (käyttämättä täydellisyyslausetta):

$$\vdash (\exists v_0 \forall v_1 R(v_0, v_1) \to \forall v_1 \exists v_0 R(v_0, v_1))$$

2. Näytä, että

$$\nvdash (\forall v_0 \exists v_1 R(v_0, v_1) \to \exists v_1 \forall v_0 R(v_0, v_1))$$

3. Osoita suoraan määritelmään vedoten, että funktio $f(x) = [{}^2log(x+1)]$ (=pienin z jolla $2^{z+1} > x+1$) on primitiivirekursiivinen.

4. Oletetaan, että $R \subseteq \mathbb{N}^3$ on rekursiivinen relaatio. Näytä, että relaatio

$$\forall z \leq x \exists y R(x, y, z)$$

on rekursiivisesti numeroituva.

5. Todista Lindenbaumin lemma: Olkoon L (numeroituva) aakkosto. Jos Σ on ristiriidaton L-teoria, niin on olemassa täydellinen L-teoria Σ^* siten että $\Sigma \subseteq \Sigma^*$. Tehtävässä voidaan pitää tunnettuna, että jos Σ' on L-teoria, ϕ on L-lause ja $\Sigma' \cup \{\phi\}$ on ristiriitainen, niin $\Sigma' \vdash \neg\phi$.

Matemaattinen logiikka
7.10.2004
Loppukoe

1. Olkoon $M = (\{0,1,2,3\}, R^M)$, missä $R^M = \{(0,1),(0,2),(1,2),(0,3)\}$. Mitkä ovat struktuurin M määriteltävät osajoukot? Perustele vastauksesi.

2. Päteekö:

$$\{\forall v_0 \exists v_1 (R(v_0,v_1) \to R'(v_0,v_1))\} \vdash \forall v_0 (\exists v_1 R(v_0,v_1) \to \exists v_1 R'(v_0,v_1))?$$

3. Muotoile ja todista kompaktisuuslause.

4. Osoita suoraan määritelmään vedoten, että funktio $f(x) = 2x \dot{-} 3$ on primitiivirekursiivinen.

5. Näytä, että rekursiivisten funktioiden perhe on suljettu rekursion suhteen eli, että jos g ja h ovat rekursiivisiä funktioita, niin myös ehdolla $f(0,x) = g(x)$ ja $f(y+1,x) = h(y, f(y,x), x)$ määritelty funktio f on rekursiivinen.

Matemaattinen logiikka
16.12.2004
Loppukoe

1. Olkoon $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sellainen, että $F(x) = 2$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$. Mitkä ovat struktuurin $(\mathbb{N}, F)$ määriteltävät osajoukot? Perustele vastauksesi.

2. Todista käyttämättä täydellisyyslausetta, että
$\vdash \exists v_0 \forall v_1 R(v_0, v_1) \to \forall v_1 \exists v_0 R(v_0, v_1)$.

3. Sanotaan, että relaatio $R \subseteq M^2$ on hyvinperustettu jos ei ole olemassa alkioita $a_i \in M$, $i \in \mathbb{N}$, joilla $(a_{i+1}, a_i) \in R$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Näytä, että ei ole olemassa teoriaa Σ jonka malleina ovat täsmälleen ne struktuurit (M, R) joissa R on hyvinperustettu.

4. Osoita suoraan määritelmään vedoten, että ehdoin
$f(0) = 1$,
$f(1) = 1$,
$f(x+2) = f(x) + f(x+1)$
määritelty funktio f on primitiivirekursiivinen. Tehtävässä voi pitää tunnettuna, että funktiot π, ρ ja σ ovat primitiivirekursiivisiä.

5. Muotoile ja todista Gödelin kiintopistelause. Tehtävässä voi pitää tunnettuna, että relaatio Sub on määriteltävä struktuurissa $\mathcal{N}_{exp}$.

Matemaattinen logiikka
14.4.2005
Loppukoe

1. Oletetaan, että $\vdash \phi \to \psi$. Näytä kayttämättä täydellisyyslausetta, että

$$\vdash \exists v_0 \phi \to \exists v_0 \psi.$$

2. Päteekö: $\vdash \forall v_0 (Rv_0 \to \forall v_0 Rv_0)$?

3. Oletetaan että M ja N ovat L-struktuureita, $\pi : M \to N$ on isomorfismi, t L-termi ja s struktuurin M tulkintajono. Näytä että $t^N < \pi \circ s >= \pi(t^M < s >)$.

4. Näytä suoraan määritelmään vedoten, että ehdoilla
$f(0) = g(0) = 1$,
$f(x+1) = f(x) + g(x)$,
$g(x+1) = f(x) + x$
määritellyt funktiot f ja g ovat primitiivirekursiivisia. Tehtävässä voi pitää tunnettuna, että funktiot π, ρ ja σ ovat primitiivirekursiivisiä.

5. Oletetaan, että funktio $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ on määriteltävä struktuurissa $\mathcal{N}_{exp}$ ja että kaikilla $x \in \mathbb{N}$ on olemassa $z \in \mathbb{N}$ jolla $f(z, x) = 0$. Osoita suoraan määritelmään vedoten, että myös funktio $g(x) = \mu z(f(z, x) = 0)$ on määriteltävä struktuurissa $\mathcal{N}_{exp}$.

Matemaattinen logiikka

Loppukoe

10.8.2005

1. Todista propositiologiikan deduktiolause (eli että jos $S \cup \{A\} \vdash B$ niin $S \vdash (A \to B)$). Tehtävässä voi pitää tunnettuna, että $S \vdash A \to A$ kaikilla lausejoukoilla S ja propositiolauseilla A.

2. Todista käyttämättä täydellisyyslausetta, että

$$\{\forall v_0(\phi \to \psi)\} \vdash (\neg\psi \to \forall v_0 \neg\phi),$$

kun v_0 ei esiinny vapaana kaavassa ψ.

3. Olkoon F 1-paikkainen funktiosymboli ja $L = \{F\}$. Olkoon T L-teoria, joka koostuus seuraavista lauseista:

$\exists v_0 \exists v_1(\neg v_0 = v_1 \wedge F(v_0) = v_0 \wedge F(v_1) = v_1 \wedge \forall v_2(F(v_2) = v_0 \vee F(v_2) = v_1))$

ja

$\forall v_0 ... \forall v_n(F(v_0) = v_0 \to \exists v_{n+1}(F(v_{n+1}) = v_0 \wedge \neg v_{n+1} = v_0 \wedge \neg v_{n+1} = v_1 \wedge ... \wedge \neg v_{n+1} = v_n))$, kaikilla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Näytä, että T on täydellinen.

4. Osoita suoraan määritelmään vedoten, että funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n \dot{-} 5$ on primitiivirekursiivinen.

5. Todista Lindenbaumin lemma (eli että ristiriidaton teoria voidaan laajentaa täydelliseksi ristiriidattomaksi teoriaksi). Tehtävässä voi pitää tunnettuna, että jos $\Sigma \cup \{\phi\}$ on ristiriitainen, niin $\Sigma \vdash \neg\phi$.

Huomaa, että monisteessa kaava $t = t'$ kirjoitetaan muodossa $\approx tt'$.

Matemaattinen logiikka

Loppukoe

25.10.2005

1. Osoita suoraan määritelmään vedoten, että 1-paikkainen relaatio $\{1\}$ on primitiivirekursiivinen.

2. Todista käyttämättä täydellisyyslausetta, että
$\vdash (R(c) \to \exists v_0 R(v_0))$.

3. Olkoon $\mathbb{Z}_3 = (\{0,1,2\}, +_3)$, missä $n +_3 m = n + m$ jos $n + m < 3$ ja muuten $n +_3 m = n + m - 3$. Mitkä ovat tämän struktuurin määriteltävät osajoukot?

4. Oletetaan, että $R \subseteq \mathbb{N}^3$ on rekursiivinen relaatio. Näytä, että relaatio

$$\forall z \leq x \exists y R(x, y, z)$$

on rekursiivisesti numeroituva.

5. Todista Lindenbaumin lemma.

Matemaattinen logiikka
20.12.2005
Loppukoe

1. Olkoon Z kokonaislukujen joukko ja $S : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}$ sellainen, että $S(x) = x + 1$. Mitkä ovat struktuurin (Z, S) määriteltävät osajoukot? Perustele vastauksesi.

2. Todista käyttämättä täydellisyyslausetta, että
$\vdash \exists v_0(\phi \vee \psi) \to (\exists v_0\phi \vee \exists v_0\psi)$.
Vihje: Huomaa, että $(\forall v_0\neg\phi \to \neg\phi) \to ((\forall v_0\neg\psi \to \neg\psi) \to ((\forall v_0\neg\phi \wedge \forall v_0\neg\psi) \to \neg(\phi \vee \psi)))$ on tautologia.

3. Osoita suoraan määritelmään vedoten, että funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 4^{(n+1)}$ on primitiivirekursiivinen.

4. Olkoon $R \subseteq \mathbb{N}$ rekursiivisesti numeroituva ja $S \subseteq \mathbb{N}$ sellainen, että $x \in S$ jos ja vain jos on olemassa $y \in \mathbb{N}$ jolla $\pi(y, x) \in R$. Näytä, että S on rekursiivisesti numeroituva.

5. Muotoile ja todista Tarskin lause. Tehtävässä voi pitää Gödelin kiintopistelausetta tunnettuna.

Matemaattinen logiikka
Loppukoe
3.4.2006

1. Osoita suoraan määritelmään vedoten, että funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n \dot{-} 1$ on primitiivirekursiivinen.

2. Todista käyttämättä täydellisyyslausetta, että
$\vdash \neg\exists v_0 \neg\neg\phi \to \forall v_0 \neg\phi$.

3. Olkoon $\mathbf{M} = (\{0, 1, 2, 3\}, \{(0, 1), (1, 0)\})$. Mitkä ovat tämän struktuurin määriteltävät osajoukot?

4. Olkoon aakkosto $L = \emptyset$ ja Σ L-teoria joka muodostuu lauseista

$$\forall v_0 \ldots \forall v_n \exists v_{n+1} (\neg v_{n+1} = v_0 \wedge \ldots \wedge \neg v_{n+1} = v_n),$$

missä $n \in \mathbb{N}$. Näytä, että Σ on täydellinen L-teoria.

5. Muotoile ja todista Gödelin kiintopistelause.

Matemaattinen logiikka

Loppukoe

9.8.2006

1. Todista käyttämättä täydellisyyslausetta, että
$\vdash \phi \rightarrow \exists v_0 \phi$.

2. Olkoon $\Sigma = \{\phi_n | \, n \in \mathbb{N}\}$ teoria ja oletetaan, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $\vdash \phi_{n+1} \rightarrow \phi_n$ ja että jokaisella lauseella ϕ_n on malli. Näytä, että teorialla Σ on malli.

3. Osoita suoraan primitiivirekursiivisen funktion määritelmään vetoamalla, että funktio $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = 2^n \dot{-} 2n$ on primitiivirekursiivinen.

4. Oletetaan, että funktiot $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ja $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ovat rekursiivisia, $\mathrm{rng}(f) \cup \mathrm{rng}(g) = \mathbb{N}$ ja $\mathrm{rng}(f) \cap \mathrm{rng}(g) = \emptyset$, missä $\mathrm{rng}(f) = \{f(x) | \, x \in \mathbb{N}\}$ ja $\mathrm{rng}(g)$ määritellään vastaavasti. Osoita suoraan rekursiivisen funktion määritelmään vetoamalla, että joukon $\mathrm{rng}(f)$ karakteristinen funktio on rekursiivinen.

5. Olkoot $f : M^2 \rightarrow M$ ja $g_i : M \rightarrow M$, $i < 2$, määriteltäviä struktuurissa M. Näytä, että $h(x) = f(g_0(x), g_1(x))$ on määriteltävä struktuurissa M.

Matemaattinen logiikka
Loppukoe
24.10.2006

1. Todista käyttämättä täydellisyyslausetta, että
$\{\forall v_0 \forall v_1 (v_0 = v_1)\} \vdash \forall v_0 \forall v_1 (P(v_0) \rightarrow P(v_1))$.

2. Näytä, että kvanttoriaksioomat ovat valideja.

3. Osoita suoraan primitiivirekursiivisen funktion määritelmään vetoamalla, että funktio $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(0) = 5$ ja $f(n) = n + 1$ kun $n \neq 0$, on primitiivirekursiivinen.

4. Oletetaan, että $\pi : M \rightarrow N$ on isomorfismi. Näytä, että kaikilla vakiotermeillä t, $\pi(t^M < s >) = t^N < s' >$, missä s on struktuurin M tulkintajono ja s' on struktuurin N tulkintajono.

5. Oletetaan, että $R(x, y, z)$ on rekursiivinen relaatio. Näytä, että relaatio $\forall z \leq x \exists y R(x, y, z)$ on rekursiivisesti numeroituva.

Matemaattinen logiikka

25.1.2007

Loppukoe

1. Todista (käyttämättä täydellisyyslausetta), että
$\vdash \neg\forall v_0\phi \rightarrow \exists v_0\neg\phi$.

2. Mitkä ovat struktuurin $(\{0,1,2,3\},\{(0,2),(2,0)\})$ määriteltävät osajoukot? Perustele vastauksesi huolella.

3. Näytä suoraan primitiivirekursiivisen funktion määritelmään vetoamalla, että funktio $f(x) = 3^x \dot{-} 1$ on primitiivirekursiivinen.

4. Oletetaan, että funktiot $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ja $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ovat rekursiivisia ja että kaikilla $x \in \mathbb{N}$, $g(f(x)) \geq x$. Näytä suoraan rekursiivisen funktion ja relaation määritelmään vetoamalla, että joukko $\{f(x) | \ x \in \mathbb{N}\}$ on rekursiivinen.

5. Muotoile ja todista Lindenbaumin lemma.

Matemaattinen logiikka

Loppukoe

12.4.2007

1. Oletetaan että $A \subseteq \mathbb{N}$ ja $\mathbb{N} - A$ ovat rekursiivisesti numeroituvia. Näytä rekursiivisen funktion määritelmään vetoamalla, että A on rekursiivinen.

2. Todista käyttämättä täydellisyyslausetta, että
$$\{\forall v_0(\phi \rightarrow \psi)\} \vdash \forall v_0\phi \rightarrow \forall v_1\psi.$$

3. Olkoon $\mathbf{M} = (\{0,1,2,3\}, \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,0)\})$ $\{R\}$-struktuuri. Mitkä ovat tämän struktuurin määriteltävät osajoukot?

4. Olkoon aakkosto $L = \emptyset$ ja Σ L-teoria joka muodostuu seuraavista kahdesta lauseesta:
$$\forall v_0\forall v_1\forall v_3(v_0 = v_1 \vee v_1 = v_2 \vee v_0 = v_2)$$
$$\exists v_0\exists v_1(\neg v_0 = v_1)$$
Näytä, että Σ on täydellinen L-teoria.

5. Näytä, että kvanttoriaksioomat ovat valideja.

Matemaattinen logiikka

Loppukoe

14.6.2007

1. Mitkä ovat struktuurin $(\mathbf{Q}, <, 0)$ määriteltävät osajoukot.

2. Todista käyttämättä täydellisyyslausetta, että
$\vdash \exists v_0 R(v_0) \to \exists v_1 R(v_1)$.

3. Päteekö: $\vdash \exists v_0(\neg R(v_0) \to \forall v_0 R(v_0))$?

4. Oletetaan, että f ja g ovat rekursiivisia injektioita $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ja että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on olemassa $x \in \mathbb{N}$ jolla $f(x) = n$ tai $g(x) = n$. Olkoon $S \subseteq \mathbb{N}$ niiden n joukko joilla löytyy $x \in \mathbb{N}$ jolla $f(x) = g(x) = n$. Näytä, että S on rekursiivinen relaatio.

5. Muotoile ja todista Tarskin lause. Tehtävässä voi pitää Gödelin kiintopistelausetta tunnettuna.