Matemaattinen logiikka
17.12.2007
2. Välikoe

1. Olkoon $L = \{P\}$ ja $T = \{\phi\} \cup \{\phi_n | \, n \in \mathbb{N}\}$ L-teoria, missä P on 1-paikkainen relaatiosymboli,
$\phi = \exists v_0(\neg P(v_0) \wedge \forall v_1(\neg P(v_1) \rightarrow v_1 = v_0))$
ja
$\phi_n = \forall v_0 ... \forall v_n \exists v_{n+1}(P(v_0) \wedge \bigwedge_{i \leq n} \neg v_{n+1} = v_i)$.
Näytä, että T on täydellinen.

2. Oletetaan, että $g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ovat primitiivirekursiivisia, ja kaikilla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $g(n) < n$. Määritellään $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ siten, että $f(0) = 0$ ja $f(n+1) = h(f(g(n+1)))$. Näytä, että f on primitiivirekursiivinen.

3. Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{N}$ ja $\mathbb{N} - A$ ovat rekursiivisesti numeroituvia. Näytä suoraan rekursiivisen funktion ja relaation määritelmään vetoamalla, että A on rekursiivinen.

4. Oletetaan, että $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ on määriteltävä struktuurissa $\mathcal{N}_{exp}$. Määritellään $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ siten, että $g(0) = 0$ ja $g(n+1) = f(g(n))$ (eli $g(n) = f^n(0)$, missä $f^0 = id$ ja $f^{n+1} = f \circ f^n$). Näytä, että g on määriteltävä. Tehtävässä voi pitää tunnettuna, että funktiot $m \mapsto len(m)$ ja $(m, i) \mapsto (m)_i$ ovat määriteltäviä struktuurissa $\mathcal{N}_{exp}$.

Matemaattinen logiikka

15.12.2008

2. Välikoe

1. Näytä suoraan määritelmään vetoamalla, että funktio

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{y} (x+i)$$

on primitiivirekursiivinen.

2. Oletetaan, että $R \subseteq \mathbb{N}^3$ on rekursiivinen. Olkoon $S \subseteq \mathbb{N}$ niiden $z \in \mathbb{N}$ joukko joilla löytyy $x, y \in \mathbb{N}$ siten että $(x, y, z) \in R$. Näytä, että S on rekursiivisesti numeroituva.

3. Näytä, että jokainen ääretön rekursiivisesti numeroituva joukko sisältää äärettömän rekursiivisen joukon.

4. Olkoon $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \times, 0, 1, \leq, f, g)$ struktuuri, missä $+, \times$ ja $\leq$ ovat luonnollisten lukujen tavalliset laskutoimitukset ja järjestys ja $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ovat sellaisia, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $a_0, ..., a_{k-1} \in \mathbb{N}$ löytyy $x \in \mathbb{N}$ jolla $g(x) = k$ ja kaikilla $i < k$, $f(x, i) = a_i$.
Määritellään sanojen joukko seuraavasti: 101 ja 1011 ovat sanoja ja jos A ja B ovat sanoja, niin $AB0$ on sana. Näytä, että

$$\{x \in \mathbb{N} |\ f(x,0)...f(x,g(x)-1) \text{ on sana}\}$$

on määriteltävä joukko $\mathcal{N}$:ssä.