Matemaattinen logiikka

15.12.2004

2. Välikoe

1. Osoita suoraan määritelmään vedoten, että

(i) funktio $f(x, y) = y \dot{-} x$

ja

(ii) relaatio $\{x \in \mathbb{N} | \ x \text{ on parillinen}\}$

ovat primitiivirekursiivisia.

2. Oletetaan, että funktiot $g_0 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ ja $g_1 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ ovat primitiivitekursiivisia. Näytä suoraan määritelmään vedoten, että ehdoilla

$$f_0(0) = f_1(0) = 0,$$
$$f_0(x + 1) = g_0(x, f_0(x), f_1(x)),$$
$$f_1(x + 1) = g_1(x, f_0(x), f_1(x))$$

määritellyt funktiot f_0 ja f_1 ovat primitiivirekursiivisiä. Tehtävässä voi pitää tunnettuna, että funktiot π, ρ ja σ ovat primitiivirekursiivisiä.

3. Olkoon P 1-paikkainen relaatiosymboli, F 1-paikkainen funktiosymboli ja $L = \{P, F\}$. Olkoon T L-teoria, joka koostuus seuraavista lauseista:

$$\forall v_0(P(F(v_0)) \leftrightarrow \neg P(v_0))$$

ja

$$\forall v_0(F(F(v_0)) = v_0).$$

(i) Kuvaile millaisia teorian T mallit ovat.

(ii) Näytä, että T on $\aleph_0$-kategorinen.

(iii) Näytä, että T ei ole täydellinen.

4. Oletetaan, että funktiot $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ja $g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ovat määriteltäviä struktuurissa $\mathcal{N}_{exp}$. Osoita suoraan määritelmään vedoten, että myös funktio $h(x) = f(g_0(x), g_1(x))$ on määriteltävä struktuurissa $\mathcal{N}_{exp}$.

Matemaattinen logiikka

16.12.2005

2. Välikoe

1. Olkoon $L = \emptyset$ ja $T = \{\forall v_0 \forall v_1 (v_0 = v_1)\}$. Näytä, että T on täydellinen L-teoria.

2. Näytä suoraan primitiivirekursiivisen funktion määritelmään vetoamalla, että funktiot $f(x) = 2x$ ja $f(x) = 2^x$ ovat primitiivirekursiivisia.

3. Oletetaan, että sekä $R \subseteq \mathbb{N}$ että $\mathbb{N} - R$ ovat rekursiivisesti numeroituvia. Näytä, että R on rekursiivinen.

4. Näytä suoraan määriteltävän funktion määritelmään vetoamalla, että funktio $f(0) = 1$, $f(1) = 1$ ja $f(n+2) = f(n) + f(n+1)$ on määriteltävä struktuurissa $\mathcal{N}_{exp}$. Tehtävässä voi pitää tunnettuna, että funktiot $g(x, y) = (x)_y$ ja $h(x) = len(x)$ ovat määriteltäviä struktuurissa $\mathcal{N}_{exp}$.

Matemaattinen logiikka

13.12.2006

2. Välikoe

1. Näytä suoraan primitiivirekursiivisen funktion määritelmään vetoamalla, että funktio

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} k$$

on primitiivirekursiivinen.

2. Olkoon f kuten edellisessä tehtävässä. Näytä suoraan määriteltävyyden määritelmään vetoamalla, että f on määriteltävä struktuurissa $\mathcal{N}_{exp}$. Tehtävässä voi (tarvittaessa) pitää tunnettuna, että funktiot $g(a) = len(a)$ ja $h(a, i) = (a)_i$ ovat määriteltäviä struktuurissa $\mathcal{N}_{exp}$.

3. Näytä suoraan rekursiivisen funktion määritelmään vetoamalla, että ääretön $R \subseteq \mathbb{N}$ on rekursiivinen jos ja vain jos on olemassa aidosti kasvava rekursiivinen funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jolla $R = \{f(n) | \; n \in \mathbb{N}\}$.

4. Olkoon $R \subseteq \mathbb{N}$ rekursiivisesti numeroituva ja $S \subseteq \mathbb{N}$ sellainen, että $x \in S$ jos ja vain jos on olemassa $y \in \mathbb{N}$ jolla $\pi(y, x) \in R$. Näytä, että S on rekursiivisesti numeroituva.