Matemaattinen logiikka

1. Välikoe

4.11.04

1. Oletetaan, että $\vdash (\phi \rightarrow \psi)$. Näytä (käyttämättä täydellisyyslausetta), että $\vdash (\forall v_0 \phi \rightarrow \forall v_0 \psi)$.

2. Näytä, että $\models \exists v_0 (\phi \rightarrow \forall v_0 \phi)$.

3. Olkoon $M = (\{0,1,2,3\}, R^M)$, missä $R^M = \{(0,1),(0,2),(0,3),(2,1),(3,1)\}$. Onko

(i) joukko $\{0,2\}$,

(ii) joukko $\{0\}$

struktuurin M määriteltävä osajoukko? Perustele vastauksesi tarkasti.

4. Kaikilla $n \in \mathbb{N}$, olkoon $N_n \in \mathbb{N}$, $f_n : \{0, ..., N_n\} \rightarrow \{0,1\}$ ja S_n niiden totuusjakaumien $v : \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$ joukko joilla $v(k) = f_n(k)$ jollain $k \leq N_n$. Näytä, että jos kaikilla $m \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{n=0}^{m} S_n \neq \emptyset$, niin $\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n \neq \emptyset$. Vihje: Etsi propositiologiikan lauseet A_n niin että $v(A_n) = 1$ joss $v \in S_n$ ja käytä propositiologiikan kompaktisuuslausetta.

Matemaattinen logiikka

1. Välikoe

21.10.05

1. Näytä (käyttämättä täydellisyyslausetta), että
$\vdash (\forall v_0 \phi \to \exists v_0 \phi)$.

2. Näytä, että kaikilla struktuureilla M ja struktuurin M tulkintajonoilla s, $M \models_s \forall v_0(\phi \to \exists v_0 \phi)$. (Perustele tarkasti Tarskin totuusmääritelmästä lähtien.)

3. Näytä, että $\{\forall v_0 R(v_0) \to \forall v_0 R'(v_0)\} \not\vdash \exists v_0 R(v_0) \to \exists v_0 R'(v_0)$.

4. Olkoon $M = (\{0,1,2,3\}, R^M)$, missä $R^M = \{(0,1),(0,2),(0,3)\}$. Onko joukko $\{0,1\}$ määriteltävä struktuurissa M?

Matemaattinen logiikka

1. Välikoe

20.10.06

1. Näytä (käyttämättä täydellisyyslausetta), että
$\{\forall v_0(\phi \wedge \psi)\} \vdash \forall v_0 \phi$.

2. Näytä, että $\exists v_0(\phi \rightarrow \forall v_0 \phi)$ on validi.

3. Olkoon $M = (\{0,1,2\},\{1,2\})$. Onko joukko $\{0,1\}$ määriteltävä struktuurissa M?

4. Olkoon $L = \{P, f\}$ aakkosto, missä P on 1-paikkainen relaatiosymboli ja f on 1-paikkainen funktiosymboli. Olkoon T teoria, joka koostuu seuraavista lauseista:

$\forall v_0(P(v_0) \leftrightarrow \neg P(f(v_0)))$,

$\forall v_0 f(f(v_0)) = v_0$

ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

$\forall v_0 ... \forall v_n \exists v_{n+1}(P(v_{n+1}) \wedge \neg v_0 = v_{n+1} \wedge ... \wedge \neg v_n = v_{n+1})$.

Näytä, että T on täydellinen teoria.