Martingaalit ja harmoninen analyysi – tentti 13.5.2008 (3 h)

English version on the other side!

Vastaa **neljään** (4) itse valitsemaasi kysymykseen. Kaikki ovat samanarvoisia.

Kirjoita jokaiseen palauttamaasi paperiin **kurssin nimi**, **päivämäärä**, **koko nimesi** sekä joko **opiskelijanumerosi** tai **henkilötunnuksesi** (eli sosiaaliturvatunnus).

1. Olkoot $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ joukon Ω σ-algebroita ja $\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ mitta, jolla $(\Omega, \mathscr{G}, \mu)$ on σ-äärellinen. Olkoon $f \in L^1_\sigma(\mathscr{F}, \mu)$ ja olkoon g sellainen $\mathscr{G}$-mitallinen funktio, että $g \cdot f \in L^1_\sigma(\mathscr{F}, \mu)$. Todista, että tällöin
$$\mathbb{E}[g \cdot f|\mathscr{G}] = g \cdot \mathbb{E}[f|\mathscr{G}].$$
Saat käyttää tarvittavia suppenemislauseita, ilman että niitä tarvitsee erikseen todistaa.

2. Määrittele diskreettiaikaiseen martingaaliin $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ liittyvä Doobin maksimifunktio ja esitä (ei tarvitse todistaa) sitä koskeva Doobin epäyhtälö. Olkoon sitten $(\mathscr{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ avaruuden $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ suodatus, missä kaikki mitta-avaruudet $(\Omega, \mathscr{F}_i, \mu)$ ovat σ-äärellisiä ja
$$\sigma\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \mathscr{F}_i\Big) = \mathscr{F}.$$
Olkoon $p \in (1, \infty)$ ja $f \in L^p(\mathscr{F}, \mu)$. Osoita (saat vedota tarvittaviin tiheystuloksiin), että $\mathbb{E}[f|\mathscr{F}_i] \to f$ pisteittäin m.k., kun $i \to \infty$.

3. Esitä Burkholderin epäyhtälö diskreettiaikaisen martingaalin $(f_i)_{i=0}^n$ etumerkkimuunnokselle. Määrittele lisäksi käsitteet kaksoiskonkaavi (biconcave) ja siksakmartingaali. Osoita, että sopivan kaksoiskonkaavin funktion olemassaolosta (tätä olemassaoloa ei tarvitse todistaa) seuraa Burkholderin epäyhtälö. Saat olettaa tunnetuksi tarvittavat tulokset siitä, että Burkholderin epäyhtälö riittää osoittaa eräille yleistä helpommille martingaaleille.

4. Olkoot $p, \beta \in (1, \infty)$ vakioita ja olkoon $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konkaavi funktio, joka toteuttaa
$$w(t) = w(-t) \geq 1 - \beta^p |t|^p \quad \text{kaikilla } t \in \mathbb{R} \qquad \text{ja} \qquad w(t) = w(1) \cdot |t|^p \quad \text{kun } |t| \geq 1.$$
Osoita, että tällöin $\beta \geq p' = p/(p-1)$.

5. Määrittele (tavallinen) dyadisten välien järjestelmä sekä siihen liittyvät Haarin funktiot. Millainen esitys funktiolla $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(1 < p < \infty)$ on Haarin funktioiden avulla? (Tulos riittää, ei tarvitse todistaa.) Määrittele vielä Petermichlin dyadinen siirto ja todista, että se on rajoitettu operaattori avaruudessa $L^p(\mathbb{R})$. Saat käyttää kaikkia tarvittavia martingaaleja koskevia tuloksia ilman eri todistusta.

6. Olkoot $\phi_1, \ldots, \phi_k$ trigonometrisia polynomeja, $\phi_j(x) = \sum_{m=-M}^{M} a_j(m) e^{i2\pi mx}$, ja lisäksi $a_k(0) = 0$. Määrittele ϕ_k:n konjugaattifunktio ψ_k. Asetetaan $f(t) := \prod_{j=1}^{k} \phi_j(x_j + y_j t)$, missä $x, y \in \mathbb{R}^k$. Osoita, että sopivalla y:n valinnalla (vielä niin, että $y_j \neq 0$ kaikilla j) f on myös trigonometrinen polynomi ja sen konjugaattifunktio on $g(t) = \prod_{j=1}^{k-1} \phi_j(x_j + y_j t) \cdot \psi_k(x_k + y_k t)$.