Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Malliteoria syksy 2008
Kurssikoe 1
14.10.2008

1. Jos $x_1, \ldots, x_n$ ovat verkon pisteitä s.e. pisteiden x_i ja x_{i+1} välillä on särmä kaikilla $i = 1, \ldots, n-1$ ja pisteiden x_n ja x_1 välillä on särmä, niin kyseiset pisteet muodostavat verkossa *syklin*. Olkoon $\mathcal{K} = \{\mathcal{G} : \mathcal{G}$ on verkko, joka sisältää syklin$\}$. Osoita, että $\mathcal{K}$ ei ole elementaarinen luokka.

2. Olkoon $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, 1^{\mathcal{A}}, \cdot^{\mathcal{A}})$ $\{1, \cdot\}$-struktuuri luonnollisilla tulkinnoillaan. Osoita, että alkulukujen joukko on määriteltävissä $\mathcal{A}$:ssa.

3. Olkoon T $\mathcal{L}$-teoria ja $T_\forall = \{\varphi : \varphi$ on universaali $\mathcal{L}$-lause ja $T \models \varphi\}$. Osoita, että $\mathcal{A} \models T_\forall$ jos ja vain jos on olemassa $\mathcal{M} \models T$, jolla $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$.

4. Muotoile ja todista alaspäinen Löwenheim-Skolem-lause.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Malliteoria syksy 2008
Kurssikoe 2
9.12.2008

1. Olkoon T $\mathcal{L}$-teoria, jolla on Skolem-funktiot, ja olkoon $\mathcal{M}_0 \models T$ $\mathcal{L}$-struktuuri, joka uppoaa kaikkiin T:n malleihin. Osoita, että T on täydellinen.

2. Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ saturoituja $\mathcal{L}$-struktuureja, joilla $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ ja $|\operatorname{dom}(\mathcal{M})| = |\operatorname{dom}(\mathcal{N})|$. Osoita, että $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

3. Olkoon $\mathcal{L}$ numeroituva aakkosto ja T täydellinen $\mathcal{L}$-teoria, jonka mallit ovat äärettömät. Osoita, että $\mathcal{M} \models T$ on alkumalli jos ja vain jos $\mathcal{M}$ on numeroituva ja atominen.

4. Olkoon T $\mathcal{L}$-teoria, jolla on äärettömiä malleja ja olkoon $(I, <)$ ääretön lineaarijärjestys. Osoita, että on olemassa $\mathcal{M} \models T$, joka sisältää erottamattoman jonon $(x_i : i \in I)$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Malliteoria syksy 2008
Loppukoe
17.12.2008

1. Olkoon T $\mathcal{L}$-teoria, jolla on mielivaltaisen suuria äärellisiä malleja. Osoita, että T:llä on ääretön malli.

2. Todista *Vaughtin testi*: Jos T on toteutuva $\mathcal{L}$-teoria, jolla ei ole äärellisiä malleja ja joka on κ-kategorinen jossakin äärettömässä mahtavuudessa $\kappa \geq |\mathcal{L}|$, niin T on täydellinen.

3. Osoita, että kaksi saman täydellisen teorian $\aleph_0$-saturoitua mallia ovat edes-takais-ekvivalentit.

4. Osoita, että numeroituvan aakkoston täydellinen teoria T on $\aleph_0$-kategorinen jos ja vain jos kaikilla $n < \omega$, jokainen $p \in S_n(T)$ on isoloitu.

5. Olkoon κ säännöllinen kardinaali ja olkoon T κ-stabiili $\mathcal{L}$-teoria. Osoita, että on olemassa saturoitu $\mathcal{L}$-struktuuri $\mathcal{M} \models T$, jolla $|\operatorname{dom}(\mathcal{M})| = \kappa$.