Helsingin Yliopisto
Matematiikan Laitos
Malliteoria
Loppukoe 10.8.1999

1. Todista alkumallitesti: Jos T on mallitäydellinen teoria, jolla on alkumalli, niin T on täydellinen.

2. Olkoot $\mathcal{Z}$ kaikkien kokonaislukujen joukko, $\mathbb{R}$ kaikkien reaalilukujen joukko, $f(z) = -z$, kun $z \in \mathcal{Z}$ ja $g(r) = -r$, kun $r \in \mathbb{R}$. Osoita, että $\langle \mathcal{Z}, f \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \mathrm{g} \rangle$.

3. Olkoon $\mathcal{A}$ malli $\langle \mathcal{Z}, f \rangle$, missä $\mathcal{Z}$ on kaikkien kokonaislukujen joukko ja f on funktio $f(z) = -z$. Olkoon T mallin $\mathcal{A}$ täydellinen teoria. Osoita, että joukossa S_1T on tasan kaksi alkiota. Montako alkiota on joukossa S_2T?

4. Osoita, että Peanon aksioomilla on kaksi ei-isomorfista numeroituvaa rekursiivisesti kyllästettyä mallia.

5. Olkoon L aakkosto. Olkoon $\mathcal{A}$ kyllästetty L-struktuuri ja $\mathcal{B}$ mielivaltainen L-struktuuri. Oletetaan, että $|B| \leq |A|$ ja jokainen eksitentiaalinen lause, joka on tosi $\mathcal{B}$:ssa on tosi myös $\mathcal{A}$:ssä. Osoita, että $\mathcal{B}$ on isomorfinen $\mathcal{A}$:n jonkin alimallin kanssa. (ϕ on *eksistentiaalinen* jos se on muotoa $\exists x_1 ... \exists x_n \psi$, missä ψ on kvanttorivapaa.)

Helsingin Yliopisto
Matematiikan Laitos
Malliteoria
Loppukoe 8.8.2002

1. Olkoot $M_n, n < \omega$, äärellisiä malleja ja olkoon k_n mallin M_n mahtavuus. Osoita, että ultrapotenssi $\prod_n M_n/F$ ei-prinsipaalisen ultrafiltterin F suhteen on mahtavuudeltaan ääretön jos ja vain jos $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$.
2. Osoita, että Peanon aksioomeilla on ylinumeroituvan monta ei-isomorfista numeroituvaa mallia.
3. Todista alkumallitesti: Jos T on mallitäydellinen teoria, jolla on alkumalli, niin T on täydellinen.
4. Muotoile ja todista Craigin Interpolaatiolause.
5. Osoita, että jos kahdessa elementaarisesti ekvivalentissa mallissa, joiden mahtavuus on sama, toteutuu täsmälleen samat tyypit, niin mallit ovat isomorfiset.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Malliteoria
loppukoe
25.1.2007

See reverse side for the questions in English.

1. Olkoon L aakkosto ja $\mathbb{K}$ kaikkien äärellisten L-struktuurien luokka. Osoita että $\mathbb{K}$ ei ole aksiomatisoituva ensimmäisen kertaluvun teorialla.

2. Olkoon $(A_i)_{i<\gamma}$ elementaarinen ketju L-struktuureja (eli $A_i \preccurlyeq A_j$ kun $i < j < \gamma$) ja olkoon $A = \bigcup_{i<\gamma} A_i$. Osoita että kaikilla $j < \gamma$,
$$A_j \preccurlyeq A.$$

3. (a) Oletetaan että A ja B ovat numeroituvia edes-takas-ekvivalentteja L-struktuureja. Osoita että A ja B ovat isomorfiset.
   (b) Kirjoita esimerkki aakkostosta L ja kahdesta L-struktuurista A ja B, jotka ovat edes-takas-ekvivalentteja ja yhtämahtavia, mutta eivät isomorfisia. Esimerkki riittää, todistuksia ei tarvitse kirjoittaa.

4. Olkoon L numeroituva aakkosto ja $\mathbb{K}$ numeroituva joukko äärellisesti viritettyjä L-struktuureja, jolla on perinnöllisyysominaisuus (HP) ja yhdistetyn upotuksen ominaisuus (JEP). Osoita että $\mathbb{K}$ on jonkin numeroituvan L-struktuurin ikä.

5. Olkoon L numeroituva ensimmäisen kertaluvun kieli ja T ω-kategorinen L-teoria jolla on äärettömiä malleja. Osoita että kaikille $n < \omega$ ja $p \in S_n(T)$, p on prinsipaalinen.

– in English →